RESSOURCES POUR FAIRE LA CLASSE

LE NOMBRE AU CYCLE 3

APPRENTISSAGES NUMÉRIQUES

MATHÉMATIQUES

[CNDP-CRDP]

Sommaire

Secrétariat d'édition : Laura Karayotov
Maquette et couverture : Claire Pacquelet
Mise en pages : Isabelle Guicheteau

Téléport 1 @4 BP 80158
86961 Futuroscope Cedex
ISBN : 978-2-240-03303-1
ISSN : 1968-4029

Préface

En continuité avec le document publié pour le cycle 2, *Le Nombre au cycle 3* poursuit le travail d'explicitation des questions numériques : l'extension du champ des nombres entiers, la découverte des nombres décimaux et des fractions, la proportionnalité, les relations entre mesures et nombres, toutes questions que l'on sait délicates à traiter et qui appellent une réflexion précise des enseignants. Comme pour le précédent document, les auteurs sont des enseignants-chercheurs, des inspecteurs de l'Éducation nationale, des enseignants de mathématiques ou des professeurs des écoles. Chacun a apporté sa propre expérience et son expertise d'un sujet dans le cadre d'un travail coopératif où les échanges au sein de l'équipe constituée ont été nombreux et riches. Le travail qui vous est offert est donc la résultante d'une réflexion longue, l'objectif étant de permettre une appropriation aisée de chaque article et de permettre de nourrir des échanges professionnels au plan local dans des contextes de formation-animation d'école ou de circonscription.

Nous espérons que *Le Nombre au cycle 3* sera un outil utile à la réflexion des enseignants et aux équipes de circonscription, qu'il provoquera des échanges formateurs et qu'ainsi il participera à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques ainsi qu'au développement du goût pour cette discipline, au plaisir de chercher, de trouver, de comprendre les nombres.
Nous remercions très sincèrement les auteurs pour la qualité de leur réflexion et leur disponibilité pour les échanges.

Jean-Louis Durpaire
Marie Mégard
Inspecteurs généraux de l'Éducation nationale

Retour au sommaire

Ce document est le fruit d'un groupe de travail composé de :
Bertrand Barilly, inspecteur de l'Éducation nationale
Valérie Bistos, inspectrice de l'Éducation nationale
Denis Butlen, professeur des universités
Jean-Jacques Calmelet, inspecteur de l'Éducation nationale
Christine Chambris, maître de conférences
Jacques Douaire, maître de conférences
Fabien Emprin, maître de conférences
Patrice Gros, inspecteur de l'Éducation nationale
Gabriel Le Poche, professeur de mathématiques
Pascale Masselot, maître de conférences
Nicole Matulik, conseillère pédagogique de circonscription
Arnaud Simard, maître de conférences

coordonné par :
Jean-Louis Durpaire, inspecteur général de l'Éducation nationale
Marie Mégard, inspectrice générale de l'Éducation nationale
avec l'appui du bureau des écoles (DGESCO A1-1)

Retour au sommaire

Partie 1

Les nombres entiers naturels au cycle 3

Patrice Gros et Jean-Jacques Calmelet

Le sens du nombre se construit progressivement chez l'enfant, à partir de l'ensemble des pratiques et des relations au nombre qu'il exerce hors de l'école comme à l'école. À l'école, « le nombre » ne peut être isolé dans un chapitre de manuel ou même dans une unité d'apprentissage ; il ne peut faire l'objet d'un enseignement formel. Il émerge en tant que concept comme résultat d'une articulation forte entre, d'une part, des apprentissages structurés et progressifs (la terminologie, les décompositions, l'élargissement progressif vers les grands nombres, le calcul…), et d'autre part, des pratiques.
En effet le sens du nombre ne se limite pas à des connaissances académiques sur les nombres mais se construit et se manifeste dans la compréhension et l'usage de propriétés, de relations, de dénominations, par la pratique des opérations dans lesquelles il intervient comme acteur ou comme résultat : compter, calculer, résoudre des problèmes, mesurer sont ainsi à la fois des mises en application et des contributions à la « notion de nombre ».
Aujourd'hui, beaucoup de pratiques sociales (utilisation de la carte bancaire au lieu de la monnaie, systèmes de mesures directs…) désincarnent le nombre, en réduisent la fréquentation et donc l'usage dans la vie courante de l'élève. Au XXI^{e} siècle, la responsabilité de l'école dans la construction du sens du nombre est donc plus que jamais engagée.
Au cycle 1 et au début du cycle 2, le nombre désigne avant tout le cardinal d'une collection.
À partir du CE1, puis au cycle 3, l'extension du domaine des nombres bouleverse cette représentation. Et ainsi le terme « grand », dans l'expression les « grands » nombres, fait plus référence pour l'élève à un lexique entendu, qu'à un ordre de grandeur clairement appréhendé : au-delà de « beaucoup, énormément… », quelle représentation raisonnable peut-on en effet se faire du budget de l'État, du « trou de la Sécu », de la distance de la Terre à la Lune… ? À moins d'en avoir une connaissance formelle, pour la plupart d'entre nous, faut-il plutôt chiffrer ces sommes en millions d'euros ? En milliards d'euros ? Que représente le « trou de la Sécu » par rapport au budget de la France ? Et pour la distance Terre-Lune, s'exprime-t-elle mieux en millions de mètres ? en millions de kilomètres ?
Au cycle 3, l'élève devra donc franchir cette nouvelle étape dans l'abstraction et entrer dans une généralisation des principes de la numération étudiés jusqu'alors, en utilisant des puissances de dix de plus en plus grandes et de moins en moins signifiantes (10 ou 100 « parlent » mieux que 10 000 ou 100 000…). Cette étape est décisive et elle n'a rien d'évident ou de naturel. Elle relève d'un enseignement qui doit permettre à l'élève d'accéder à une compétence de haut niveau mobilisable dans différents contextes, et qui se manifestera notamment par :
– la connaissance formelle de ces nombres, leur désignation ;

Retour au sommaire

– la capacité à les comparer, à les classer ;
– la perception de l'écart entre deux nombres, des « différences de taille » ;
– la compréhension et la pratique des approximations (arrondis à la dizaine, centaine…) ;
– la maîtrise de leurs utilisations dans divers contextes et notamment dans les opérations ;
– leur utilisation pertinente dans les autres champs disciplinaires (géographie, sciences… voir ci-dessous).

Pour réussir, ces apprentissages, considérés comme nouveaux, doivent s'appuyer sur une solide connaissance des nombres entiers inférieurs à la centaine ou au millier et des principes de la numération décimale, lesquels doivent donc être vérifiés, et confortés si besoin.

Ils s'appuient sur un enseignement explicite des écritures, des décompositions, du lexique et des principes de calcul, mais aussi sur la fréquentation et la pratique des différentes actions sur et avec ces nombres, dans des situations qui ont du sens et qui peuvent être issues de toutes les disciplines : en histoire, en géographie, en sciences, voire en EPS, on peut être amené à mesurer, dénombrer, évaluer, comparer… avec des grands nombres. Ces situations dans d'autres contextes permettent aux élèves d'appréhender les nombres autrement, de les manipuler avec des possibilités de contrôle, les utiliser efficacement, autrement dit, d'engager avec eux un rapport plus familier. Et de mieux percevoir la relativité de certains jugements sur la taille des nombres ; selon le contexte, on dit par exemple : « C'était il y a longtemps : il y a 1 000 ans », « Il y a peu d'habitants dans ce village : il y en a 1 000 ».

Pour conclure, disons que de la maternelle à la fin de l'école élémentaire le sens du nombre se construit en cours de mathématiques à l'occasion d'exercices de dénombrement et de mesurage qui sollicitent le code (écritures chiffrées, nom des nombres, unités de numération) et d'apprentissage du fonctionnement du code. Il se construit aussi dans des exercices d'estimation qui peuvent induire des calculs (combien y a-t-il de lettres (environ) dans ce texte ?). Il s'exerce et se consolide aussi dans les autres disciplines et dans le contexte culturel dans lequel vit l'enfant.

Les programmes, de la maternelle au cycle 3

Dès le début de l'école maternelle, les élèves dénombrent, apprennent à déterminer des quantités discrètes, à reconnaître des liens entre les quantités et les nombres, et ce, dans de nombreux contextes. « L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres et de son utilisation dans des procédures de quantification[1] ».

À l'école élémentaire, jusqu'au CE1, « les élèves apprennent la numération décimale inférieure à 1 000. Ils dénombrent des collections, connaissent la suite des nombres, comparent et rangent ». Ils explorent les nombres entiers naturels et apprennent à comprendre et à mettre en œuvre les principes de la numération décimale de position ; ils perçoivent l'algorithme de l'écriture. Le sens des nombres inférieurs à 1 000 reste souvent lié à celui de cardinal, les collections d'objets considérées sont la plupart du temps concrètement dénombrables. Une intuition de la grandeur relative des nombres se construit et s'approfondit progressivement par la pratique des différentes décompositions qui explicitent la valeur des chiffres en fonction de leur position, ainsi que par les exercices de comparaison.

1. Durpaire, Mégard, *Le Nombre au cycle 2*, 2010 (voir bibliographie, p. 14).

Retour au sommaire

Comme dit précédemment, le passage du nombre comme cardinal d'une collection à la numération est un processus d'abstraction difficile, qui ne s'achève pas au cycle 2. Au cycle 3, le développement du sens du nombre se poursuit avec la découverte d'autres nombres que les entiers (fractions et nombres décimaux) et leur mise en relation les uns avec les autres ainsi qu'avec le traitement de grands nombres (dénombrement de collections comportant plusieurs milliers d'objets ; usage de nombres de l'ordre du milliard). Mais le sens des nombres entiers s'enrichit aussi :

– avec l'utilisation de diverses notations et écritures, par lesquelles l'élève apprend à distinguer le nombre de son écriture, par exemple la décomposition en puissances de 10 : 1 893 = 1 × 1 000 + 8 × 100 + 9 × 10 + 3 ;
ou 1 893 = 1 millier 8 centaines 9 dizaines 3 unités ;
– avec la maîtrise des tables de multiplication ainsi que les décompositions additives : 25 c'est 5 × 5, c'est 20 + 5…
– avec la mémorisation d'autres faits numériques :
les compléments (990 c'est 10 de moins que 1 000) ;
les doubles et les moitiés (25 c'est le quart de 100).

Extrait des programmes 2008

Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Les nombres entiers jusqu'au million Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million. Comparer, ranger, encadrer ces nombres. Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier. Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60.	Les nombres entiers jusqu'au milliard Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard. Comparer, ranger, encadrer ces nombres. La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.	Les nombres entiers

Remarque : l'interprétation du « vide » du CM2 ne doit pas prêter à confusion. Cela signifie qu'il n'y a aucune nouveauté à découvrir au CM2 sur les nombres entiers en termes de connaissances. Pour autant, le travail de consolidation, de structuration de la numération décimale se poursuit, afin d'automatiser les décompositions (les écritures additives et multiplicatives) et la lecture des grands nombres, mais aussi de renforcer leur familiarité en lien notamment avec leur fréquentation dans le domaine des grandeurs et mesures.

Ce que l'on doit apprendre au cycle 3 sur les nombres entiers

Conforter la numération décimale

Au CP, le groupement par 10 est privilégié pour dénombrer des collections d'objets nombreux ; groupements et échanges construisent progressivement le passage de l'idée de nombre à celui de numération.

Au CP-CE1, les élèves acquièrent le fait que « 10 unités, c'est une dizaine » puis que « 100 unités, c'est une centaine, mais aussi 10 dizaines ». La position du chiffre donne des informations sur la valeur de ce chiffre : c'est un apprentissage qui doit se poursuivre et s'étoffer au cycle 3, pour chaque puissance (l'unité, la dizaine, la centaine fonctionnent chacune comme des unités à part entière).

Retour au sommaire

Au cycle 3, en abordant des nombres plus grands, la structuration des nombres entiers (principe de position, principe de rapport dix entre les différentes unités représentées à chaque position) peut et doit être perçue : c'est un saut majeur qui conduit l'élève à passer d'une suite de nombres à la compréhension plus fine de ce qu'est la numération décimale. Bien sûr, cette acquisition est progressive tout au long du cycle 3.

Appréhender les grands nombres

Au cycle 3, on aborde les millions et milliards et les symboles pour comparer, ranger et encadrer ces nombres.

Millions, milliards

C'est un saut qualitatif sensible puisque dans ces « grands » nombres, la notion de quantité est plus difficile à percevoir, à représenter mentalement, même dans le cadre des mesures de grandeurs (un km, c'est un million de mm ?).
Cependant les comparaisons et la recherche d'ordres de grandeurs permettent de mieux apprécier ces nombres. Des domaines autres que les mathématiques peuvent utilement être mobilisés (voir plus haut) offrant ainsi des situations qui donnent du sens à un certain nombre de repères concrets utiles, qu'il s'agisse de mettre en application des connaissances mathématiques formelles ou d'en faciliter l'introduction.
Quelques situations de mesures discrètes comme le cardinal d'une population ou la datation en années peuvent être rencontrées, mais la plupart du temps les grandeurs sont continues (voir exemples) : cela ne pose pas de problème particulier (et pourra évidemment même s'avérer très utile pour donner du sens aux nombres décimaux !).
Quelques exemples :
– **les longueurs :** distance Paris/New York : 5 828 km (environ 6 000 km), distance Paris/Sydney : 16 970 km, distance moyenne Terre/Lune : 384 400 km, distance moyenne Terre/Soleil : 149 600 000 km ;
– **les aires :** superficie de la France : 551 695 km^2 (soit 551 695 millions de m^2, ou 551 695 000 000 m^2), superficie du Portugal : 91 950 km^2 ;
– **les masses :** masse de déchets électriques, en France, en 2007 : 172 800 tonnes ;
– **le temps :** apparition des algues : il y a 450 000 000 d'années, apparition des plantes à fleurs : il y a 120 000 000 d'années, nombre de secondes en une semaine : 604 800 secondes ;
– **la monnaie :** prix d'un avion (exemple de l'Airbus A380... à ce jour) : 218 385 000 euros, montant du Smic.
La contextualisation des grands nombres dans des domaines disciplinaires divers est indispensable.
La référence aux mesures, très importante ici, doit engager un enseignement des conversions de mesures sous forme de rapports de proportionnalité, ce qui doit conduire à des écritures multiplicatives et faciliter le recours quasi systématique aux décompositions.
Exemple : 5 828 km c'est 5 828 × 1 000 mètres, c'est aussi 5 828 milliers de mètres.
Remarque : au moment où apparaissent les décimaux, en début de CM1, il faut aborder avec prudence certaines pratiques qui peuvent conforter quelques représentations de type « les nombres décimaux n'existent pas » : par exemple, la proposition

Retour au sommaire

« 57,14 € c'est 5 714 centimes d'euros » est vraie, mais elle peut favoriser ou renforcer un évitement des nombres décimaux très tentant chez beaucoup d'élèves. Il est sans doute préférable de décomposer d'abord 57,14 € = 57 € + 0,14 €.

Comparer, ranger, encadrer

La représentation d'une droite numérique évolue au cycle 3. Elle continue d'avoir son importance : la réponse spontanée à une question de type « Cent est-il plus près d'un ou de mille ? » (qui ne résiste pas qu'aux élèves d'école élémentaire) en est un révélateur. La droite numérique permet des représentations des écarts que le calcul confirmera.

La construction d'une droite numérique avec les élèves, jusqu'au million, puis au milliard est un épineux problème. Les frises historiques du commerce offrent l'avantage de permettre de situer sur un même graphique les grandes périodes et dates étudiées, mais elles sont peu cohérentes du point de vue mathématique : on aura intérêt à les étudier de près avec les élèves pour débusquer avec eux les artifices graphiques (une ondulation qui s'accentue dans la représentation de la préhistoire, ou des pointillés qui « couvrent » une longue période…) qui fournissent une représentation erronée des distances historiques : ainsi 1789 est souvent plus proche du Moyen Âge que de notre époque, et les Gaulois plus près de la préhistoire… !

L'écriture des nombres, en lettres ou en chiffres, est chargée de sens. Aussi la lecture orale est-elle un exercice indispensable : elle aide à appréhender l'ordre de grandeur, facilite les comparaisons, et donne du sens à l'écriture chiffrée par tranche de trois chiffres. Parallèlement, des exercices d'écriture doivent aussi être proposés, qui concourent aux mêmes objectifs. La lecture et l'écriture des nombres demande « rigueur et précision » (socle commun) ; on veillera à la précision de l'oral et de l'écriture en chiffres ; pour l'écriture en lettres, les règles orthographiques doivent être enseignées et apprises, mais leur maîtrise ne doit pas constituer un préalable à l'activité mathématique.

Poursuivre l'étude des relations entre les nombres

Comme cela est explicitement dit, afin de mieux appréhender les nombres, les élèves doivent en fréquenter beaucoup, dans des contextes divers, et avoir souvent l'occasion d'établir des relations entre ceux-ci ; ils percevront d'autant mieux leur sens.

Relations arithmétiques

Les programmes énoncent trois types de relations différentes mais complémentaires.

– double, moitié ou demi, triple, quart : ces expressions ne sont pas forcément reliées aux fractions. En effet, elles font appel à des relations fondamentales entre les nombres qui doivent être connues : la moitié de 30 est 15 ; le quart de 80 est 20 ; (Bien entendu, ces expressions peuvent être mathématisées sous formes de fractions, avec, dans ce cas, des apprentissages différents. Comme par exemple, 30 × 1/3) ;

– relations entre des nombres d'usage courant : les décompositions additives et multiplicatives des nombres 100, 1 000 doivent faire l'objet d'une attention particulière. Par exemple : 100 = 20 × 5 ; 100 = 4 × 25 ; 100 = 10 × 10 ; 100 = 75 + 25 ; 100 = 50 + 50 ; « 25 est le quart de 100 » ; 100 : 4 = 25. La diversité des écritures, fréquemment rappelée, doit aider les élèves à s'approprier des faits numériques stables qui, par conséquent, pourront être mobilisés chaque fois que nécessaire ;

Retour au sommaire

– la notion de multiple : cette notion exigible au CM1 peut être abordée dès le CE2. Elle permet de mettre en évidence une caractéristique de certains nombres (par exemple, « dans 30, il y a 6 fois le nombre 5 »). Le travail sur la division dépend de la qualité de cet apprentissage, bien différent de l'étude de critères de divisibilité qui ne sont pas exigibles.

Relation d'ordre

La compréhension de l'ordre se poursuit au cycle 3 ; il est nécessaire d'y revenir car les difficultés sont parfois différentes au cycle 3 qu'en CP-CE1, du fait de l'arrivée des grands nombres (entiers) mais aussi des nombres décimaux et des fractions. La compréhension doit précéder l'introduction des symboles « < » et « > » dont l'utilisation est exigible au cycle 3. L'apprentissage simultané des symboles de comparaison « < » et « > » permettant par ailleurs aussi de donner au signe mathématique « = » de nouveaux sens. En effet, si au cycle 2 le signe « = » est généralement exclusivement utilisé pour inscrire le résultat d'une opération ($125 + 75 = 200$), il possède d'autres sens très importants qui seront à travailler durant les trois années du cycle :
– a pour résultat : $2 + 2 = 4$;
– égalité entre des nombres donnés : $125 = 1 \times 100 + 2 \times 10 + 5$;
– égalité faisant intervenir des variables : $c + c + c + c = 4 \times c$;
– lien entre des grandeurs, formule : $P = 4 \times c$;
– affectation : tu prendras $c = 4$;
– désignation : « Pour effectuer le calcul, tu prendras $\pi = 3{,}1$ ».
Concernant les procédures de comparaison, l'enseignant sera attentif à faire expliciter les procédures des élèves afin que ces derniers ne confortent pas des théorèmes élèves (théorèmes instaurés par les élèves au vu de certaines situations valides).
Par exemple : pour comparer 999 et 100 000, des élèves perçoivent 999 comme le nombre le plus grand car la valeur des chiffres (9) est supérieure aux valeurs 1 ou 0.

Conclusion

On aura observé tout au long de ce bref panorama de nombreuses références aux usages et activités hors du champ « Nombres et calcul » ou même hors du champ scolaire. Certes, l'usage « concret » des nombres facilite la compréhension chez les élèves. Mais une autre raison peut aussi être invoquée, qui justifie de multiplier les applications concrètes des nombres : c'est que l'école n'a pas seulement le devoir de former les élèves aux mathématiques, mais qu'elle a aussi celui de former de futurs citoyens, qui devront maîtriser ces outils pour agir et décider dans leur vie quotidienne.
À ce titre, l'apprentissage du sens du nombre est l'enjeu central de l'enseignement du pilier 3 du socle commun de connaissances et de compétences.

Bibliographie

- **DURPAIRE J.F., MÉGARD M. (dir)**, *Le Nombre au cycle 2*, CNDP, Chasseneuil-du-Poitou, 2010.

Retour au sommaire

Partie 2

Le système métrique au service de la numération des entiers et des grandeurs

Christine Chambris

Pourquoi ce texte ?

Quel est l'enjeu de l'enseignement du système métrique aujourd'hui ? Ce système d'unités a été inventé pour unifier le système de mesure sur tout le territoire français mais surtout pour que la résolution des problèmes de mesurage et de calcul des grandeurs bénéficie des propriétés de la numération décimale de position. Avec l'évolution des technologies de mesurage et de calcul, la maîtrise des relations entre numération et système métrique n'est sans doute plus aussi cruciale qu'elle l'a été. L'enjeu actuel est plutôt d'avoir une bonne maîtrise des unités métriques usuelles pour traiter les problèmes de la vie courante. Une explicitation des relations avec la numération y est favorable. En retour, la numération bénéficie du temps passé à étudier le système métrique. Ce texte, centré sur la numération des entiers, a ainsi deux objectifs : inscrire les objectifs d'étude du système métrique dans d'autres, relatifs à l'étude des nombres et des grandeurs ; exploiter au mieux les relations favorables entre système métrique et numération pour consolider la maîtrise de la numération des entiers. Autrement dit, il s'agit de consolider l'étude du système métrique et d'en faire un outil au service de la numération et du sens des nombres.

Quelques éléments sur les relations entre les deux domaines dans l'enseignement

Des exercices de calcul, de numération, de système métrique ou quatre exercices de numération ?

Voici quatre exercices.
1. Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8 564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?
2. Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?
3. Le nombre de centaines de 8 734 est…
4. 8 kg = ? hg

Des recherches[1] montrent que les enseignants de cycle 3 identifient majoritairement le premier exercice comme un exercice de division et qu'en fin de cycle 3 les élèves reconnaissent des exercices de division dans les deux premiers. Ils associent le troisième à la numération : il faut « couper » le nombre ; et le quatrième au système métrique : une conversion qui se résout en utilisant un tableau.

1. Parouty 2005, Chambris 2008.

Retour au sommaire

On peut pourtant voir ces quatre exercices – sous des conditions qui sont au cœur de ce texte – comme quatre variations du même exercice de numération.

Système métrique et numération : des connaissances communes ?

Ces conditions ne vont donc pas de soi et pour continuer à explorer les relations entre numération et système métrique, voici deux exemples d'utilisations répandues de tableaux dans chacun des domaines au début du cycle 3.

En numération

m	c	d	u
4	5	2	3

4 523

4 523 =
4 000 + 500 + 20 + 3
(4 × 1 000) + (5 × 100) + (2 × 10) + (3 × 1)

4	0	0	0	→	4 000
	5	0	0	→	500
		2	0	→	20
			3	→	3

Figure 1 – Tableau des nombres et exemples de décompositions associées

En système métrique

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
5	6	8	3			
			4	2	7	

5 km 6 hm 8 dam 3 m = 5 683 m
427 cm = 4 m 2 dm 7 cm

Figure 2 – Tableau des unités de longueur et exemples de décompositions associées

À chaque tableau sont associées des décompositions (ou recompositions) de formes différentes et les deux tableaux sont remplis différemment. Par exemple, les nombres sont « calés à droite » dans le tableau de numération alors qu'ils « flottent » au milieu du tableau de conversion. En système métrique, il n'y a de zéro ni dans les décompositions, ni dans le tableau alors qu'en numération ils sont présents aux deux endroits.
Quelles relations y a-t-il entre les deux tableaux ? Quelles relations y a-t-il entre les décompositions ou recompositions des deux domaines ? Les mêmes connaissances y sont-elles vraiment en jeu ?

Système métrique : entre nombre et grandeur

Complète avec l'unité qui convient : mètres, centimètres, grammes, kilogrammes, minutes, heures.

Au stade, Antoine a fait un saut en hauteur de 60 ....

Il a réussi à soulever une caisse qui pesait 8 ....

Il a lancé une balle lestée de 200 .... à une distance de 6 ....

Il a fait un tour de piste en 4 ....

	Réponses en %			
saut en hauteur	60 cm 36,38	60 m 52,45	autre 7,99	sans 3,17
caisse soulevée	8 kg 46,34	8 g 39,79	autre 10,37	sans 3,51
balle lestée	200 g 42,84	200 kg 20,67	autre 29,47	sans 7,01
lancée à une distance de	6 m 36,63	6 cm 25,12	autre 24,76	sans 13,50
un tour de piste en	4 mn 61,10	4 h 16,66	autre 11,82	sans 10,42

Figure 3 – Extrait des évaluations CE2 (2001)

Retour au sommaire

Les résultats à cet exercice (figure 3) proposé au début du cycle 3 montrent que plus de 6 élèves sur 7 reconnaissent la grandeur en jeu lorsque le contexte est simple : ils choisissent une unité de longueur et non de masse pour la première ligne et l'inverse pour la deuxième. Ils ne répondent pas que le saut en hauteur mesure 60 kg par exemple. Ce qui fait la difficulté de l'exercice n'est donc pas tant la reconnaissance de la grandeur en jeu que celle des ordres de grandeur, en particulier la prise en compte de la relation entre nombre et unité. Comment travailler cette relation ?

Numération décimale de position

La numération décimale de position, notre numération écrite en chiffres, est un système de désignation des nombres. Elle est essentielle dans les mathématiques dès l'école primaire. Elle permet de désigner à la fois les entiers et les décimaux. Elle simplifie notamment les calculs des différentes opérations. Pour s'en convaincre, il suffit d'essayer de calculer une multiplication de deux nombres à plusieurs chiffres en chiffres romains !
Par ailleurs, la numération orale et le système métrique sont deux thèmes qui constituent aussi des objectifs d'enseignement. Tout comme celles de la numération décimale de position, leurs fondations sont en base dix[2]. Ils constituent ainsi deux autres systèmes de désignation des nombres (ou des grandeurs) à base dix. Un enjeu est alors de les utiliser pour consolider la connaissance de la numération décimale de position. Comment les liens peuvent-ils se faire ?

Les unités de numération

Tout au long de ce texte les mots et expressions unités, dizaines, centaines, milliers, dizaines de milliers… sont très largement utilisés. Ils désignent des unités[3] de compte. On les appellera **unités de numération**. De même qu'on a compté 1, 2, 3, 4, 5 unités, on compte 1, 2, 3, 4, 5 dizaines[4]. Ces unités de numération désignent donc les puissances de dix sans recours aux notations de type 10 ou 1 000.

Une décomposition particulière en unités de numération

Toute quantité se décompose de manière unique en une somme d'unités de numération dans laquelle chaque unité est présente en 9 exemplaires au plus (par exemple 5 centaines 6 dizaines), cette décomposition est souvent qualifiée de **canonique** (la plus simple). Ce qu'on appelle le « chiffre des dizaines » est ainsi le coefficient des dizaines dans la décomposition canonique (le 6 dans 560 ou dans 5 centaines 6 dizaines)[5]. D'autres décompositions en unités existent (par exemple 4 centaines 16 dizaines ou encore 3 centaines 17 dizaines 90 unités).

2. À l'oral, pour les « grands nombres », la base mille intervient aussi, de même les bases cent et mille pour les mesures d'aire et de volume en unités « carré » et « cube ».

3. Le mot « unité » est polysémique. En particulier, l'unité désigne d'abord la quantité qui sert de référence pour établir une mesure (ou un dénombrement). En numération, le mot désigne aussi les unités successives qu'on est amené à fabriquer pour les besoins du système de désignation, c'est-à-dire les différents ordres d'unités. L'unité de référence est l'unité du 1er ordre, on l'appelle parfois unité simple. La dizaine est l'unité du 2e ordre, elle est constituée par dix unités du 1er ordre, la centaine est l'unité du 3e ordre constituée par dix unités du 2e ordre, etc.

4. L'apprentissage de la numération (et de la multiplication) nécessite ainsi de concevoir au moins implicitement des unités composites, c'est-à-dire constituées de plusieurs éléments : la dizaine qui contient dix unités ou la centaine qui en contient cent… Les élèves doivent ainsi apprendre à voir **dix** quand ils comptent **un** (une dizaine).

5. Le « chiffre des dizaines » est donc un nombre.

Principes de la numération écrite chiffrée : position et décimalité

Notre système écrit de numération lie deux aspects : position et décimalité. Dans l'aspect positionné, ce qui importe c'est le fait que chaque position indique une unité de numération. Dans l'aspect décimal, ce qui importe c'est la relation entre les positions : deux positions consécutives indiquent des unités de numération qui sont dans le rapport dix.
Il importe de travailler spécifiquement chacun de ces aspects ; or ils sont très liés dans le système écrit. Ce n'est pas le cas dans toutes les numérations rencontrées à l'école. Ainsi, comme le suggère la suite du texte, utiliser d'autres systèmes de numération (orale, en unités, métriques…) constitue un moyen pour le faire.

Grandeur

Très tôt dans l'Histoire, les hommes ont appris à compter des choses, des cailloux, des moutons, des quantités discrètes… On peut toujours déterminer combien un ensemble fini contient d'objets, il y a une unité privilégiée mais on ne peut pas toujours diviser un tel ensemble en parts égales. Qu'est-ce que partager trois dictionnaires en deux parties égales ? Par ailleurs, dès la plus haute Antiquité, les hommes ont manié des objets possédant diverses grandeurs. Et si, à l'inverse de ce qui se passe pour les ensembles finis (ensemble d'objets discrets), un fil par exemple peut être partagé en parts égales (du point de vue de sa longueur), on ne peut pas dire de prime abord combien il contient d'unités. Il n'y a pas d'unité privilégiée pour décrire la longueur d'un fil. Plus généralement, il n'y a pas d'unité privilégiée pour « compter » ou « mesurer » les grandeurs qui sont continues.
Comprendre ce que c'est qu'être long, lourd, volumineux, comprendre comment se comparent, s'additionnent, se fractionnent en parts égales, se mesurent les grandeurs, tout cela participe de la conceptualisation des grandeurs. Cette étude s'engage dès le cycle 1, elle se poursuit au cycle 2, puis au cycle 3.
Ce texte propose une réflexion sur l'enseignement du système métrique. Il met en avant les relations de ce système avec la numération et la complémentarité possible des apprentissages dans les deux domaines. Les deux premières parties du texte explicitent des liens entre les deux domaines : la première présente des premiers éléments sur l'aspect décimal, la deuxième sur l'aspect positionné. Dans une troisième partie, on revient sur l'aspect décimal, en particulier sur le travail nécessaire des relations entre unités tant pour la numération, le système métrique que le calcul. Une brève quatrième partie évoque des potentialités de la numération orale pour l'apprentissage des aspects décimaux et positionnels. La cinquième partie est consacrée à la question des ordres de grandeur des grandeurs. Les estimations de grandeurs et l'utilisation des instruments de mesure interviennent alors pour consolider tel ou tel aspect de la numération et développer davantage le sens des nombres… et la connaissance des grandeurs.

Un premier travail des relations entre unités

Cette section concerne les relations du type un pour dix ou dix pour un, un pour cent ou cent pour un… Quelques éléments de programmation y précèdent des indications sur le travail de ces relations : tant sur le plan de leurs matérialisations que de leurs formulations. Viennent ensuite d'autres contextes où ces relations interviennent.

Retour au sommaire

Éléments de programmation

Les relations entre les unités de numération doivent être explicitées et travaillées (à l'oral et à l'écrit) au fur et à mesure que les unités sont enseignées, dès le cycle 2 pour celles qui concernent ce cycle, au cycle 3 pour les autres : en particulier celles exprimant le rapport dix entre deux unités successives, une dizaine = dix unités, une centaine = dix dizaines, un millier = dix centaines ; et aussi un million = mille milliers.
Les relations entre unités métriques doivent aussi être enseignées. Les progressions choisies permettent de décider le moment d'enseignement de telle ou telle relation. Par exemple, à la fin du CP, les élèves peuvent estimer des longueurs d'objets en mètres, d'autres en centimètres et cela peut n'être que plus tard au cours du CE1 qu'ils apprennent qu'un mètre c'est aussi cent centimètres, après qu'ils ont appris (ou repris) le nombre cent – consolidant ainsi cette dernière connaissance.

Matérialiser les relations entre unités

Des situations particulières de dénombrement

Au CE2, voire au début du CM1, dénombrer des ensembles finis d'objets, éventuellement organisés et/ou représentés, continue à être le premier moyen d'apprendre les unités de numération et les relations entre elles. Compter « un » pour une pluralité semble nécessaire pour comprendre que ce sont des unités et pour mettre en relation les unités successives, jusqu'au millier. La représentation de la figure 4 permet d'expliciter qu'une, deux, trois…, dix étoiles font une dizaine d'étoiles. Une dizaine, deux dizaines…, dix dizaines d'étoiles font une centaine d'étoiles. Une centaine, deux centaines… dix centaines d'étoiles font un millier d'étoiles.

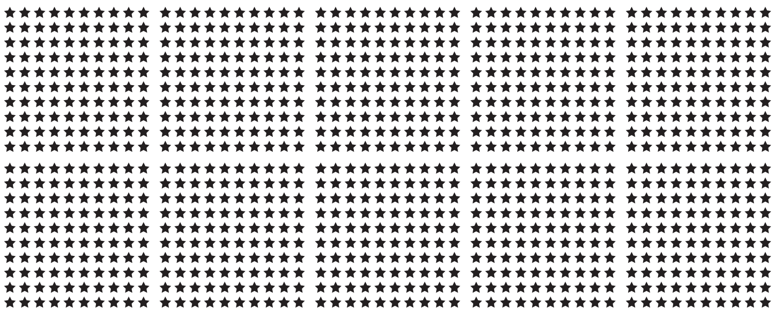


Figure 4 – Étoiles (collection organisée)

En s'appuyant par exemple sur ce support, selon les progressions choisies, on peut poser différentes questions aux élèves. « Combien y a-t-il de dizaines d'étoiles dans un millier d'étoiles ? » On peut y répondre en comptant une par une les dizaines ou en constatant qu'il y a dix dizaines de dizaines d'étoiles ou encore dix fois, dix dizaines d'étoiles. Pour introduire le millier, si les élèves ont appris seulement les nombres de 3 chiffres, on peut demander combien il y a de dizaines d'étoiles, combien il y a de centaines d'étoiles, enfin combien il y a d'étoiles sur la feuille (999 + 1). Une trace écrite pourrait être : 1 millier = 10 centaines, 1 millier = 100 dizaines, 1 millier = mille unités, mille est le nombre qui suit 999[6]. Cette tâche consolide la connaissance de la relation entre dizaine et centaine et permet de créer un nouvel ordre d'unité : le millier, comme dix unités de l'ordre précédent.

6. Utiliser l'écriture 1 000 introduit une autre connaissance : l'aspect positionnel (voir partie suivante).

Manipuler des grandeurs et des instruments de mesure

Des connaissances de la vie courante, qu'il convient si besoin d'enseigner au préalable, permettent de mémoriser, de retrouver rapidement ou plus simplement de contrôler certaines relations. Savoir que le mètre est plus long que le centimètre permet de choisir qu'un mètre = cent centimètres et non l'inverse. Le fait qu'un double décimètre (la règle graduée) comporte vingt centimètres peut être un moyen de vérifier, constater ou apprendre qu'un décimètre c'est aussi dix centimètres. Les élèves de CE1 ne sont pas tous convaincus que les règles de 20 cm de tous les élèves de la classe se superposent exactement. C'est une chose qu'ils peuvent éprouver et vérifier. En relation avec la règle graduée, le décimètre peut ainsi être introduit dès le cycle 2. La règle de l'élève peut aussi constituer un « référent » pour la longueur de 2 dm ou 20 cm. Plus généralement, la matérialisation des relations élémentaires entre les unités métriques peut consolider l'aspect décimal des unités. Par exemple, vérifier – en juxtaposant plusieurs double décimètres ou en en reportant un – que dix décimètres mis bout à bout sont aussi long qu'un mètre ; vérifier sur une balance à plateau un équilibre entre des masses : une masse de 1 kg et 10 paquets de 100 g ou une masse de 1 kg et d'autres masses, une de 500 g (pour 5 centaines de g ou 5 hg), deux de 200 g (pour 2 centaines de g ou 2 hg) et une de 100 g ; observer que courir dix fois cent mètres (ou un hectomètre), c'est aussi courir un kilomètre. De même, estimer successivement la même longueur (d'environ dix mètres) en mètres puis en décamètres est à la fois un moyen de consolider les ordres de grandeur des unités métriques et les relations entre unités successives. Au CE2, associer transvasements et lecture des étiquettes présentes sur les bouteilles permet de mettre en relation 100 centilitres (50 cl + 50 cl) et 1 litre. Ce constat doit être relié à une certaine matérialisation de la grandeur d'un centilitre.

Formuler les relations entre unités

Les relations entre unités de numération

Outre le rapport dix entre les premières unités et le rapport mille entre millier et million, d'autres relations doivent être connues ou facilement reconstruites, par exemple cent dizaines = un millier, dix centaines de milliers = un million. Elles sont ici exprimées en utilisant quelques mots de la numération orale : un, dix, cent, mille. D'autres formulations sont possibles : une dizaine de dizaines = une centaine, une dizaine de centaines = un millier… Les élèves doivent être confrontés aux deux « sens » d'une relation : un millier c'est dix centaines, dix centaines c'est un millier. Ils doivent aussi avoir des occasions multiples et variées de les mobiliser car il ne suffit pas en général d'expliciter telle ou telle relation pour que les élèves s'en emparent.

La signification des préfixes métriques

En référence aux préfixes, on peut repérer trois types de relations entre unités métriques. Un premier type est le rapport de l'unité considérée à l'unité de référence (par exemple, le préfixe « kilo » indique que le kilomètre se réfère au mètre dans un rapport mille), un deuxième concerne le rapport dix entre unités successives, un troisième concerne les rapports entre unités quelconques. La signification des préfixes métriques d'origines grecque ou latine : *déca* – dix, *hecto* – cent, *kilo* – mille, *deci* – dix, *centi* – cent, *milli* – mille permet donc de repérer le rapport à l'unité de

Retour au sommaire

référence (pour les unités monodimensionnelles, et non les unités d'aire « carrée » ou de volume « cube »). À certains moments de l'apprentissage, les préfixes *déci, centi, milli* peuvent ainsi être utilisés pour mettre en évidence le rapport entier plutôt que le rapport fractionnaire : mille millimètres = un mètre (le millier d'unités est le mètre lorsque l'unité est le millimètre) plutôt qu'un millimètre = un millième de mètre (le millième d'unité est le millimètre lorsque l'unité est le mètre). De même, les préfixes grecs *déca, hecto, kilo* pourront être utilisés avec des fractions : un mètre = un millième de kilomètre, par exemple. Connaître l'ordre de succession des unités peut aider à se souvenir de la signification des préfixes et permet aussi de percevoir rapidement le rapport dix entre deux unités métriques successives ou le rapport cent (dizaine de dizaines) lorsqu'il y a une unité intermédiaire. Ainsi, 1 décimètre c'est une dizaine de centimètres, un centimètre c'est une dizaine de millimètres, donc 1 décimètre c'est une centaine de millimètres. Enfin, comme un hectomètre c'est une centaine de mètres et un mètre c'est dix décimètres, un hectomètre c'est cent dizaines de décimètres. Un hectomètre c'est donc mille décimètres. Dans la vie courante, la plupart de ces dernières relations ne sont pas très utiles. À l'école, elles peuvent être retrouvées avec des raisonnements. Selon les progressions mises en place, les élèves peuvent être amenés à mémoriser certaines d'entre elles.

Utiliser ces relations pour traiter d'autres tâches

Outre l'utilisation des relations entre unités pour traiter les tâches qui y sont évoquées, ce paragraphe montre que certains types de tâches courants en système métrique sont rares en numération alors qu'ils ont une bonne potentialité pour le travail des relations entre unités.

Comparer deux grandeurs ou deux nombres

L'étude du système métrique comporte des tâches telles que : « Quel est le plus long entre 4 dm et 3 m ? » La relation 10 dm = 1 m permet d'affirmer que la longueur du mètre est intermédiaire entre les deux longueurs de 4 dm et 3 m et donc de conclure. Au cours de cette comparaison, des objets longs peuvent être évoqués (par exemple parmi le matériel de la classe : la règle d'un mètre et quatre craies mises bout à bout) ; on peut aussi être amené à pointer que 1 mètre contient 10 décimètres qui sont donc plus longs que 4 décimètres.
Bien que formellement analogue à la précédente, « comparer 4 dizaines et 3 centaines » est une tâche peu répandue dans l'étude de la numération des entiers. Ainsi, pour la traiter, il n'est pas indispensable d'utiliser les écritures chiffrées de 4 dizaines et 3 centaines (40 et 300) ni de se référer à la **longueur des nombres**[7] : solliciter la relation 1 centaine = dix dizaines et exprimer que 4 dizaines c'est moins que dix dizaines soient tout à fait adaptées. Il peut être intéressant d'enrichir les pratiques sur ce point. Cela prépare en outre le travail avec les décimaux où les unités de numération sont plus présentes, en particulier parce que « comparer 0,3 et 0,04 » s'oralise en « comparer 3 dixièmes et 4 centièmes ».

7. Il faut être prudent avec cette technique de comparaison des longueurs des écritures (ou du nombre de chiffres) pour comparer les nombres. Elle est correcte lorsque les nombres à comparer sont exprimés comme des nombres entiers d'une même unité (par exemple 57 et 124 ou encore 34 dixièmes et 216 dixièmes) : c'est notamment le cas lorsqu'on a des entiers en écriture positionnelle, ça ne l'est plus en général lorsqu'il s'agit de décimaux en écriture positionnelle, de mesures ou d'entiers exprimés avec des unités métriques ou de numération diverses.

Retour au sommaire

Énoncer les suites numériques écrites ou orales de 1 en 1, 10 en 10…

Même si les énoncés de ces suites doivent progressivement être automatisés, à un moment il est pertinent d'apprendre aux élèves à justifier les changements de dizaines, centaines, milliers dans les suites de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, etc. C'est encore le rapport dix entre unités successives qui permet de le faire. Par exemple, s'il s'agit de justifier la suite croissante de 100 en 100 : 3 800, 3 900, 4 000, 4 100, on peut dire qu'on ajoute une centaine à chaque fois : 3 milliers 8 centaines, 3 milliers 9 centaines, 3 milliers dix centaines – mais dix centaines, c'est 1 millier, 3 milliers et un millier, c'est 4 milliers – puis 4 milliers 1 centaine[8].

Calculer

C'est encore le rapport dix entre unités successives qui permet de justifier que 800 + 200 = 1 000 : 8 centaines et 2 centaines font dix centaines qui font 1 millier.

Le système métrique et l'aspect positionnel de la numération

Cette section continue de relier numération et système métrique. Même si l'aspect décimal y intervient, elle se centre sur l'aspect positionnel de la numération. Quatre exercices font d'abord écho aux exemples introductifs impliquant les tableaux. Les ruptures mises en évidence en introduction entre système métrique et numération sont précisées et des possibilités de liens sont envisagées.

Dénombrer une collection organisée

Voici pour commencer une nouvelle tâche de numération. Il faut répondre à la question : « combien y a-t-il de petits cubes ? »

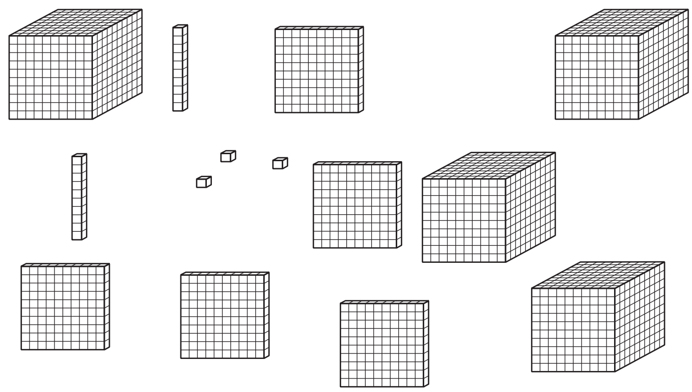


Figure 5 – Assemblage de petits cubes (matériel multibase représenté en perspective)

C'est une tâche de dénombrement. Elle est simple à condition de savoir que dans chaque barre il y a dix petits cubes, dans chaque plaque il y a cent petits cubes, dans chaque gros cube il y a mille petits cubes, c'est ce que nous supposerons ici. Deux techniques courantes pour traiter cette tâche sont présentées ci-dessous, chacune en deux étapes qui s'enchaînent.

8. On peut aussi compter les centaines (38, 39, 40, 41) en utilisant la propriété de la « troncature » (voir partie suivante), la difficulté est alors reportée sur les changements de dizaines.

Retour au sommaire

Première étape :

Technique courante n° 1	Technique courante n° 2
Compter les petits cubes dans les gros cubes : mille, deux mille, trois mille, quatre mille puis écrire 4 000.	Compter les gros cubes : un, deux, trois, quatre puis écrire 4 × 1 000.
Compter les cubes dans les plaques : cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents puis écrire 500.	Compter les plaques : un, deux, trois, quatre, cinq puis écrire 5 × 100.
Compter les cubes dans les barres : dix, vingt petits cubes puis écrire 20.	Compter les barres : un, deux, puis écrire 2 × 10.
Compter les petits cubes : un, deux, trois petits cubes puis écrire 3.	Compter les petits cubes : un, deux, trois petits cubes puis écrire 3.

Pour chacune des deux méthodes, l'étape se termine par la production d'une somme obtenue en utilisant les différents termes. Selon le cas, la somme est 4 000 + 500 + 20 + 3 ou (4 × 1 000) + (5 × 100) + (2 × 10) + 3.
Deuxième étape :
Elle consiste à réduire cette somme. La deuxième partie du tableau des nombres de l'introduction (figure 1), celle comportant les zéros, constitue un moyen de justifier le calcul de la première somme et de produire l'écriture 4 523.

Voici maintenant une technique alternative à ces techniques, découpée aussi en deux étapes.
Étape 1 : Compter les différentes unités
– compter les milliers de cubes : un, deux, trois, quatre milliers de cubes ;
– compter les centaines de cubes : une, deux, trois, quatre, cinq centaines de cubes ;
– compter les dizaines de cubes : une, deux dizaines de cubes ;
– compter les cubes : un, deux, trois cubes.
Il y a donc 4 milliers de cubes, 5 centaines de cubes, 2 dizaines de cubes, 3 cubes.
Étape 2 : Traduire directement en chiffres cette expression en unités de numération
Cette étape utilise un petit discours qui découle d'un autre discours plus général qui s'applique à la fois aux entiers et aux décimaux : dans l'écriture d'un nombre, un chiffre placé à gauche d'un autre désigne des unités dix fois plus grandes. Pour les entiers, il peut être décliné comme suit : à partir de la droite, les unités sont en 1^{re} position, les dizaines en 2^e, les centaines en 3^e, les milliers en 4^e. Il y a donc 4 523 cubes[9].

Décomposer, recomposer dans le système métrique

Deux tâches accompagnaient le tableau introductif des unités de longueur (figure 2). Pour recomposer 5 km 6 hm 8 dam 3 m en mètres, la technique suggérée dans l'introduction consiste à placer chaque chiffre dans sa colonne puis à combler si besoin les cases vides intermédiaires par des zéros, enfin à exhiber, en juxtaposant les chiffres qui sont dans les différentes colonnes, le nombre dont le chiffre des unités se trouve dans la colonne qui porte le nom de l'unité demandée. Inversement, pour décomposer 427 cm en ses unités (m, dm, cm), on place chaque chiffre successivement dans une colonne en commençant par le chiffre des unités, le 7, dans celle des centimètres.

9. C'est pour mettre en évidence le parallèle entre les différents domaines que les valeurs numériques de cet exemple ont été retenues. Néanmoins, dans une situation d'apprentissage, remplacer cinq plaques par douze plaques par exemple aurait l'avantage de consolider la connaissance de la relation entre millier et centaines, même si les regroupements sont partiellement déjà faits grâce au matériel utilisé.

Retour au sommaire

Voici maintenant des techniques alternatives pour ces tâches. Pour mettre en évidence les connaissances en jeu et le parallèle possible entre les exercices, une première présentation distingue deux étapes toujours possibles. L'une consiste à associer unités métriques et unités de numération. L'autre est commune à la dernière étape de la technique alternative de dénombrement, elle associe unités de numération et écriture chiffrée.

Compléter : 5 km 6 hm 8 dam 3 m = … m

Étape 1 : associer unités métriques et unités de numération
Un décamètre est une dizaine de mètres, un hectomètre est une centaine de mètres, un kilomètre est un millier de mètres. Donc 5 km 6 hm 8 dam 3 m signifie 5 milliers de mètres, 6 centaines de mètres, 8 dizaines de mètres, 3 mètres.
Étape 2 : associer écriture chiffrée et unités de numération
Comme l'unité est le mètre, on utilise le discours précédemment cité : en partant de la droite, les unités sont en 1e position, les dizaines en 2e, etc.
Donc 5 km 6 hm 8 dam 3 m = 5 683 m.
Dans la pratique, les deux étapes sont souvent mêlées : comme l'unité est le mètre, le 3 est en première position à partir de la droite, les décamètres sont des dizaines de mètres, donc le 8 est en 2e position, le 6 désigne des hm qui sont des centaines de mètres, donc en 3e position et les kilomètres (le 5) sont des milliers de mètres donc en 4e position.

Décomposer 427 cm en m, dm et cm

En mêlant les deux étapes, on peut dire :
Dans 427 cm, le 7 en première position indique des unités, donc des centimètres ; le 2, en 2e position indique des dizaines de centimètres (donc des décimètres) ; le 4 en 3e position indique des centaines de centimètres (donc des mètres).
Donc, 427 cm = 4 m 2 dm 7 cm.
Pour ce dernier exemple, selon les progressions adoptées, des techniques diverses peuvent être utilisées pour déterminer les relations entre le cm et les unités dm et m.

Déterminer la masse d'un objet

Revenons au premier exercice (figure 5) et imaginons maintenant qu'un petit cube pèse 1 gramme. Quelle est, en grammes, la masse totale des cubes ? Pour la connaître, on peut compter les milliers de grammes, les centaines de grammes, les dizaines de grammes, les grammes (comme on avait compté les cubes), trouver que les cubes pèsent 4 milliers de g, 5 centaines de g, 2 dizaines de g, 3 g, soit 4 kg 5 hg 2 dag 3 g et conclure avec un des discours précédents. Si les cubes ont été dénombrés au préalable, on peut bien sûr affirmer directement que 1 cube pèse 1 gramme, donc 4 523 cubes pèsent 4 523 g. Cela ne met pas en évidence les relations entre unités métriques et unités de numération.

Des techniques reliées par des discours communs

Connaître des « façons de faire » qui se ressemblent pour des tâches apparemment différentes, être capable d'adapter des techniques ou de justifier les adaptations réalisées, pour passer de l'une à l'autre sont des signes de la qualité de l'appropriation des connaissances. Dans ces quatre tâches qui font travailler

Retour au sommaire

l'aspect positionnel de la numération, les techniques alternatives introduisent plus ou moins explicitement une expression intermédiaire du même type en unités de numération. Ensuite, un discours commun, relatif aux positions des différentes unités de numération (en nombre inférieur à dix) dans l'écriture chiffrée, est utilisé. Dans cette perspective, le zéro apparaît comme un **zéro de position** : il permet à chaque chiffre d'occuper la position qui doit être la sienne compte tenu de l'unité de numération qu'il représente.

Bien sûr un exercice tel que : « Quel est le chiffre des dizaines de 6 529 ? » peut aussi être traité avec ce même type de technique. Il en va de même de « décomposer 46 003 en ses unités » (réponse : 4 dizaines de milliers 6 milliers 3 unités).

Dans cette perspective, pour calculer 4 000 + 500 + 20 + 3, une explication cohérente avec les techniques alternatives consiste à indiquer qu'il y a 4 milliers dans 4 000 (car le 4 est en 4^{e} position), il y a 5 centaines dans 500 (5 en 3^{e} position), il y a 2 dizaines dans 20 (2 en 2^{e} position) et 3 unités (3 en 1re position). La somme s'écrit donc 4 523.

Dans les techniques précédentes, lorsque c'est nécessaire, la signification des préfixes métriques, les relations entre les unités métriques, notamment le rapport dix, permettent de faire le lien avec la numération. Tant en numération qu'en système métrique, des recompositions « mélangeant » l'ordre des unités doivent aussi être proposées : écrire en chiffres (ou convertir en unités) : 2 unités 9 centaines, écrire en mètres (ou convertir en mètres) : 5 m 2 km.

Par ailleurs, la rédaction des différentes techniques et l'indication d'étapes ne doivent pas laisser croire que les techniques sont rigides, ni qu'il faut enseigner une seule façon de faire, ni qu'il faut imposer le respect de toutes les étapes. Par exemple pour compléter 5 000 g = ? kg, on peut se référer au 5 en 4^{e} position qui représente des milliers (de grammes) ou passer par l'intermédiaire de la numération orale cinq mille (si la lecture de 5 000 est immédiate et plus encore si l'exercice est donné oralement). Toutefois, tant qu'elle n'est pas maîtrisée, il semble souhaitable d'évoquer la signification du préfixe *kilo* (mille ou millier) pour cette tâche[10].

Variations sur le thème des relations entre les unités

En introduction, quatre exercices ont été présentés : déterminer le nombre de paquets de 100 feuilles pour avoir 8 563 feuilles, le nombre de paquets de 100 g dans 4 kg, le nombre de centaines dans 8 734 et convertir 8 kg en hg. Dans cette section, nous revenons sur les conditions qui permettent d'y voir quatre variations d'un même exercice de numération : tout d'abord en précisant cet exercice, le thème, puis en indiquant une diversité de situations où les connaissances en jeu interviennent et des pistes pour les travailler : les variations.

Thème et variations

Le thème : un exercice clé

Pour voir ces exercices comme un « même » exercice de numération dans différents contextes, il faut repérer que la relation entre milliers et centaines y est en jeu : un millier, c'est dix centaines ou dix centaines, c'est un millier. À ce titre, ils ont leur

10. Seulement les 2/3 des élèves de fin de cycle 3 complètent correctement 5 kg = … g. Environ 15 % des élèves écrivent 5 kg = 500 g (Chambris 2008). De plus, la méconnaissance des unités métriques semble être plus massive dans l'éducation prioritaire qu'ailleurs.

Retour au sommaire

place dès le début du cycle 3 (sauf le 4e, pour lequel l'unité « hectogramme » doit être connue[11]).
Un contexte clé n'est pas présent dans ces quatre exercices. C'est celui des unités de numération : « combien 3 milliers font-ils de centaines ? » et aussi « combien trente centaines font-elles de milliers ? ». Ces deux questions peuvent se formuler de multiples façons notamment : « convertir 3 milliers en centaines » et « convertir trente centaines en milliers ». Il y a plusieurs façons de les traiter. On peut notamment dire qu'un millier, c'est dix centaines, 3 milliers, c'est 3 fois plus. Donc, 3 milliers, c'est trente centaines. Et aussi, trente, c'est 3 dizaines ; trente centaines, c'est 3 dizaines de centaines. Donc trente centaines, c'est 3 milliers. Ces types de questions peuvent aussi être travaillés avec du matériel (« étoiles » ou multibase par exemple).

Premières variations sur le thème

Pour traiter les quatre exercices comme des exercices de numération, il faut apprendre à adapter ces techniques aux différents contextes. Par exemple, trouver le « nombre de » centaines de 8 734 consiste à trouver combien il y a de centaines dans 8 734. Le 8 (4e position) indique 8 milliers qui sont aussi 80 centaines. Le 7 (3e position) indique 7 centaines. En tout, il y a donc 87 centaines. De la même façon, trouver le nombre de paquets de 100 feuilles qu'il faut pour avoir 8 564 feuilles revient à trouver combien il y a de centaines (100 feuilles, le 1 est en 3e position, c'est une centaine de feuilles) dans 8 563 feuilles. La technique de l'exercice précédent donne 85 centaines. Il faut bien sûr ajouter 1 paquet qui ne sera qu'entamé, soit 86 paquets.
Pour déterminer combien de fois 100 g sont contenues dans 4 kg, on peut interpréter 4 kg comme 4 milliers de g et 100 g comme 1 centaine de g (1 en 3e position) puis convertir 4 milliers en centaines ou encore 100 g comme 1 hg et convertir les 4 kg en hg (voir exercice 4). Enfin, 8 kg = ? hg peut se traduire dans les unités de numération en 8 milliers de grammes à convertir en centaines de grammes, soit 8 milliers en centaines. Plus directement, sans faire appel explicitement à la relation de millier à centaines, on peut utiliser que « un kilogramme, c'est une dizaine d'hectogrammes » et donc que 8 kg sont 8 dizaines d'hg, soit 80 hg. Cette technique est préférable à terme.
Utiliser des tableaux ou des divisions pour traiter l'un ou l'autre de ces exercices est pertinent à certains moments de l'étude. **Quelle qu'elle soit, disposer d'une « même » technique pour traiter les quatre exercices favorise les liens entre les différentes connaissances (division, numération, système métrique).** Disposer d'une technique commune qui repose sur le fait que 1 millier = 10 centaines consolide cette connaissance de numération. Fondamentalement, être capable de mobiliser, dans les différents contextes, le rapport dix sous-jacent (sans nécessairement expliciter le passage par centaine et millier) est un bon indicateur de la perception du lien entre les questions.

Autres variations sur le même thème

D'autres types d'exercices permettent de travailler ces relations. Si « écrire en chiffres 3 centaines 4 milliers » sollicite uniquement la position, les deux aspects sont nécessaires pour « écrire en chiffres 56 centaines 2 milliers ».

11. Au CE2, on peut proposer des variantes impliquant les unités au programme et/ou d'autres relations numériques.

Retour au sommaire

La plupart de ces tâches peuvent être contextualisées dans des situations du type « jeu de commandes » en faisant varier les contraintes et les matériels disponibles. Des bûchettes sont vendues à l'unité et par paquets de dix, cent, mille. Combien faut-il commander de paquets de chaque sorte pour avoir 3 400 bûchettes ? Des contraintes favorables aux apprentissages peuvent être introduites au fur et à mesure, par exemple : 1) Il faut commander le moins de paquets possibles, 2) Il n'y a plus de paquet de mille. Ou encore, des bûchettes sont vendues à l'unité, par dizaines, centaines et milliers : on doit commander 30 centaines de bûchettes, il n'y a plus de centaines, que peut-on commander ?
Des comparaisons de grandeurs ou de nombres peuvent aussi intervenir, par exemple comparer 30 dam et 4 hm, 50 hm et 4 km, 30 euros et 400 centimes et aussi 30 dizaines et 4 centaines, 50 centaines et 4 milliers. Des contextes peuvent être proposés : « Qui a le plus de bûchettes : Paul qui en a 40 centaines ou Sacha qui en a 5 milliers ? ». Une tâche telle que : « Quel est le plus long entre 1 m, 99 cm et 9 dm ? » peut être traitée en sollicitant les relations entre unités formellement ou avec un appui sur les tracés des diverses longueurs.

La troncature

Toutes les tâches évoquées peuvent être traitées avec des techniques qui s'appuient sur les trois types de discours : position, relations entre unités et correspondances entre unités métriques et de numération. Un petit noyau est crucial : convertir 3 milliers en centaines et convertir 30 centaines en milliers.
Une conséquence de cette relation et du discours de position est la propriété fondamentale de l'écriture chiffrée : la troncature. « Pour qu'un nombre exprime des unités d'un certain ordre, il suffit que son chiffre des unités exprime des unités de cet ordre[12]. » Par exemple 2 345 est formé de 2 milliers et 345 unités, de 23 centaines et 45 unités ou encore de 234 dizaines et 5 unités. C'est une façon « automatique » d'obtenir le « nombre de ». Une utilisation généralisée précoce de cet automatisme n'aide probablement pas à comprendre la numération. En revanche, au cours du cycle 3, l'utiliser, avec précaution, en variant les formulations et les usages, d'abord pour les nombres de 3 chiffres, puis pour ceux de 4 chiffres, etc. est sans doute pertinent.

Des relations omniprésentes

Actuellement, les tâches du type « convertir 30 centaines en milliers » et « convertir 3 milliers en centaines » sont courantes dans l'étude du système métrique (3 kg = … hg et 30 hg = … kg) et rares dans celle de la numération. Les travailler permet de mieux comprendre la numération. En fait, les relations en jeu sont aussi présentes, parfois implicitement, dans d'autres domaines comme en témoignent les exemples suivants tirés de l'enseignement du calcul et des décimaux.
Ce sont en effet principalement ces relations qui sont sollicitées pour justifier les retenues des techniques opératoires et pour l'algorithme de la division par les unités successives. Elles sont alors souvent nécessaires sous la forme : 24 dizaines = 2 c 4 d. Par exemple, pour justifier la multiplication posée par un nombre d'un chiffre 182 × 3, on peut écrire : 2 unités × 3 = 6 unités (3 fois 2, 6) ; 8 dizaines × 3 = 24 dizaines (3 fois 8, 24) et 24 dizaines = 2 centaines + 4 dizaines (on pose 4 et on retient 2) ; 1 centaine × 3 = 3 centaines (3 fois 1, 3), 3 centaines + 2 centaines = 5 centaines (3 et 2, 5) ; 182 × 3 = 546.

12. Bezout & Reynaud 1821.

Retour au sommaire

Les relations entre unités du système de numération (ou, plus directement, la propriété de la troncature) permettent de justifier l'écriture des zéros à droite (ou les déplacements de virgule) dans les multiplications par 10, 100, 1000 :
23 × 100 = 23 centaines = 2 milliers 3 centaines = 2 300.
« Le calcul de 238 + 69 peut s'effectuer, sans support écrit, en interprétant 69 comme 7 dizaines moins 1. La somme est alors de 30 dizaines (23 + 7) et de 7 unités (8 – 1) soit 307[13] ». Cette citation indique qu'une lecture directe du nombre de dizaines de 238 est pertinente pour réaliser ce calcul mentalement. On pourrait aussi dire 3 dizaines et 7 dizaines donnent dix dizaines qui sont une centaine, en mobilisant la relation entre dizaine et centaine sans utiliser la troncature.
Dans l'étude des décimaux, mobiliser ces relations renforce par exemple la compréhension de l'écriture décimale : 0,34 se lit usuellement « 34 centièmes ». La lecture « chiffre par chiffre » donne « 3 dixièmes 4 centièmes ». La relation 3 dixièmes = 30 centièmes (tirée de 1 dixième = 10 centièmes) relie les deux lectures.

L'utilisation des différents tableaux

Les tableaux tant de numération que de système métrique rendent visibles l'ordre de succession des unités. De plus, une façon de montrer les liens entre numération et système métrique peut consister à élaborer des tableaux « glissants » (figure 6) l'un par rapport à l'autre :

dam	m	dm	cm	mm
dizaine	unité			

dam	m	dm	cm	mm
millier	centaine	dizaine	unité	

Figure 6 – Tableaux de système métrique et de numération imbriqués

Pourtant si des tableaux peuvent être utilisés pour montrer ces successions d'unités, leur utilisation pour convertir ou décomposer rend inutiles à la fois le discours sur la position : les unités en première position, les dizaines en 2e, etc. et le discours sur les relations entre les unités : une centaine = dix dizaines. C'est pour cette raison qu'il n'est sans doute pas souhaitable d'apprendre aux élèves à les utiliser précocement. Il semble en effet nécessaire que les discours, sur la position et les relations entre unités, et leur utilisation soient installés au préalable. Néanmoins, s'ils sont déjà là (ou pour les introduire), on peut accompagner leur utilisation par ces discours.

La numération orale et les décompositions en unités

Ce paragraphe évoque brièvement des potentialités de la numération orale pour travailler les aspects positionnel et décimal de la numération écrite chiffrée.
Des tâches utilisant les unités de numération peuvent consolider la numération orale : « décomposer le nombre cinq mille trois dans ses unités » (réponse : 5 milliers 3 unités), « quel est le chiffre des dizaines, celui des unités dans trois cent vingt ? » ou une tâche inverse « en utilisant les noms habituels des nombres, dire 4 milliers 5 dizaines ». Il n'est pas nécessaire de passer par l'écriture chiffrée pour traiter ces exercices. Il suffit d'utiliser les correspondances entre numération orale et unités de numération : mille – millier, cent – centaine, dix – 1 dizaine, vingt – 2 dizaines, etc. Pour les nombres de 1 à 4 chiffres, excepté pour les dizaines, ces correspondances sont faciles à retenir.

13. Durpaire, Mégard, *Le Nombre au cycle 2*, 2010 (voir bibliographie, p. 32).

Retour au sommaire

Plus généralement, une façon d'expliquer les relations entre numération décimale de position et numération orale consiste à utiliser une décomposition intermédiaire en unités de numération et le discours positionnel déjà cité : trois mille cinquante, c'est trois milliers cinq dizaines, c'est donc, à partir de la droite, 3 en 4^{e} position et 5 en 2^{e} position, c'est 3 050. En sens inverse, cette technique fonctionne pour « lire 3 050 ».
Pour les nombres de plus de 4 chiffres, par exemple pour décomposer trois cent vingt mille en ses unités, l'intermédiaire trois cent mille et vingt mille peut être utile pour élaborer 3 centaines de mille, 2 dizaines de mille. D'ailleurs, le regroupement des chiffres par paquets de trois à partir de la droite, utilisé pour la numération orale correspond en fait à une décomposition canonique en base mille du nombre : 1 032 000, c'est 1 million et 32 milliers.
Une tâche telle que « combien trois millions cinq cent mille font-ils de centaines de milliers ? » permet de travailler spécifiquement la relation entre centaine de mille et million.

Les grandeurs des nombres…

Cette section met en relation les grandeurs des unités métriques et l'aspect positionnel de la numération. Des recherches[14] montrent que si les élèves attribuent des ordres de grandeurs aux chiffres d'une écriture chiffrée c'est un indice de leur compréhension de la numération de position. Une façon d'utiliser cette connaissance didactique pour renforcer la compréhension de la numération consiste à associer des ordres de grandeur métriques aux différents chiffres d'une écriture chiffrée : par exemple associer à 305 cm deux longueurs mises bout à bout, l'une de 3 m et l'autre de 5 cm. La connaissance des ordres de grandeur des petits nombres (de 1 à 9) d'unités métriques est alors déterminante et il importe de choisir les ordres de grandeur des objets à mesurer ou à estimer en fonction des unités et des nombres à travailler.

Apprendre les unités métriques et la mesure

La lecture de graduations ou de cadrans numériques n'est pas a priori une situation favorable pour la conceptualisation des grandeurs. En revanche, les situations de comparaison de grandeurs sans instrument prévu pour mesurer le sont. Dans certaines conditions, le maniement d'instruments de mesure analogiques et le report d'unités peuvent contribuer à développer simultanément des connaissances conceptuelles sur les grandeurs et sur les unités métriques.
Pour ce qui concerne les longueurs, masses et volumes notamment, des tâches de comparaison aux unités métriques peuvent aider à conceptualiser les grandeurs. Par exemple, si on dispose d'une bouteille d'un litre, on peut se demander si le contenu de tel autre récipient va remplir ou pas la bouteille, si on va déborder beaucoup ou peu quand on va transvaser.
Ces questions d'anticipation qui précèdent la réalisation du transvasement sont favorables à la conceptualisation des capacités et à la perception de la grandeur du litre. On peut vérifier que différentes « formes » de litres (notamment le cube d'un décimètre d'arête) contiennent la même quantité de matière (et varier éventuellement les matériaux : liquides ou solides divisés tels que le sable). De plus, pour affiner leur représentation du litre, les élèves de cycle 2 peuvent vérifier qu'on peut

14. DeBlois 1996.

Retour au sommaire

remplir une bouteille d'un litre avec deux petites bouteilles d'un certain type, avec trois bouteilles d'un autre type par exemple[15].
Quand les élèves ont acquis une certaine idée de ce qu'est un litre, il importe de travailler le « report » de l'unité pour appréhender les questions de mesure en nombre entier. C'est l'addition des grandeurs qui est sous-jacente. Là encore des tâches de comparaison et d'estimation sont utiles. On peut se demander si tel objet contiendra deux fois le litre et la mesure pourra ainsi être définie.
Des référents peuvent être introduits pour aider à mémoriser les « tailles » des petites unités et leurs petits multiples (de 1 à 9) au fur et à mesure qu'elles sont introduites. Les élèves peuvent savoir qu'un stylo mesure plus qu'un dm et moins que 2 dm, de même leur empan. La profondeur de leur table est environ de 5 dm. Un élève d'école élémentaire mesure en général entre 1 et 2 m.
Pour les masses par exemple, des objets dont on dispose en plusieurs exemplaires (le livre de mathématiques, une chaise, une craie, une pièce…) et que chacun peut soupeser en un temps raisonnable peuvent permettre de construire des référents communs à la classe. Les élèves peuvent soupeser les différents objets (ou assemblages d'objets), faire des hypothèses sur leur masse. Certaines tâches peuvent être conduites sous la forme de paris. Une vérification, collective, avec un instrument de mesure peut être réalisée.
Dans certaines limites, ces activités peuvent être adaptées aux différentes grandeurs et à plusieurs unités. Une telle adaptation ne va pas de soi. Il est notamment nécessaire de prendre en compte la diversité des contextes dans lesquels une grandeur se manifeste. Quoi qu'il en soit, les tâches d'estimation de masse, capacité, aire sont en général beaucoup plus difficiles que celles d'estimation de longueur.

Les nombres avec un seul chiffre non nul et les petits nombres d'unités métriques

Les nombres avec un seul chiffre non nul interviennent à de nombreux endroits dans l'étude des nombres et du calcul. En particulier, ils constituent souvent des estimations plutôt que des mesures précises : il mesure environ 60 cm, il pèse environ 200 g. Il importe de développer des techniques pour se représenter ces grandeurs, d'autant plus que lorsque plusieurs chiffres sont non nuls le procédé peut être itéré pour chacun d'eux. Il y a souvent plusieurs façons de faire : certaines techniques mobilisent plutôt la numération, d'autres plutôt le calcul.
Pour revenir à l'exemple introductif tiré des évaluations (figure 3), imaginer 60 reports successifs d'une longueur d'un centimètre n'est pas un moyen raisonnable pour se représenter 60 cm. Voir 6 dm dans l'écriture 60 cm (6 indiquant des dizaines de cm, c'est-à-dire des dm) et imaginer une longueur de 6 décimètres – en imaginant le report de 6 fois un dm – constitue un moyen de le traiter et de consolider la numération. Avant d'être imaginée, une telle manipulation doit être effective. Dès le cycle 2, les élèves peuvent mettre bout à bout des bandes de papier d'un dm. Une autre façon de faire, en sollicitant des connaissances de calcul, voire de numération, consiste à décomposer 60 (ou 6 dizaines) en 2 fois 30 (ou 2 fois 3 dizaines) ou 3 fois 20 et à interpréter 30 cm ou 20 cm comme la longueur d'une règle graduée.
Une tâche telle que « compléter avec la bonne unité (kg ou g) : pour faire le gâteau, il faut 1… de pommes et 200… de farine » est pertinente. Avoir une idée de ce que ce sont 1 g et 1 kg ne suffit pas pour la traiter. Elle doit s'insérer dans un contexte

15. Si, au début du cycle 3, la première de ces expériences conduit à 100 cl = 1 L, à la fin du cycle, avec l'étude des fractions, elles peuvent amener à conclure que les petites bouteilles ont pour volumes respectifs un demi-litre et un tiers de litre.

Retour au sommaire

où l'apprentissage des ordres de grandeur des grandeurs est organisé. Il semble nécessaire que les élèves aient une représentation de ce qu'est 1 g, 10 g (ou une dizaine de g ou un dag), 100 g (ou une centaine de grammes ou un hg), 1 kg et de certains petits multiples de ces masses.
Là encore, des procédures assez différentes permettent de se représenter 200 g, elles dépendent des connaissances qu'on mobilise (ou dont on dispose) :
– du calcul (100 g + 100 g = 200 g ou 1 centaine de g + 1 centaine de g), un référent de 100 g et la connaissance de l'addition des masses ;
– ou la numération avec la lecture de 2 centaines de g soit 2 hg dans 200 g, un référent pour l'hg et le « report » de l'unité de masse.
Progressivement, pour différents ordres de grandeur, des référents peuvent être mis en place. Une plaquette de beurre du commerce pèse entre 200 g et 300 g (entre 2 et 3 centaines de grammes), si les élèves ont appris l'unité hg, elle peut y être associée. Cinq kilogrammes peuvent être associés à 5 paquets de 1 kg de sucre et aussi à un bidon (léger) de 5 L d'eau (puisqu'un litre d'eau pèse un kg). Il s'agit à la fois de consolider le principe d'additivité des mesures de masses et de développer des connaissances sensorielles.

Éprouver les relations entre les unités métriques

Ce point a été abordé avec la matérialisation des relations entre unités métriques dans la première section.

Associer à chaque chiffre un ordre de grandeur

Associer, par exemple pour 305 cm, 3 centaines de cm au 3 et 5 centimètres au 5 et se représenter – au moins grossièrement – ces 3 centaines de centimètres et ces 5 centimètres, c'est-à-dire deux longueurs bout à bout, l'une de 3 m, l'autre de 5 cm, permettent d'enrichir la compréhension de la numération et de développer le sens des nombres. Les systèmes d'unités à considérer dépendent des unités étudiées : dès le cycle 2, ce peut être les couples cm, dm et/ou dm, m, puis cm, dm, m et d'autres systèmes au CE2 puis au CM1.

Conclusion

Adapter les techniques, unifier les questions

Les différentes techniques présentées dans ce texte reposent sur trois types de discours, plus ou moins imbriqués, et dans lesquels les unités de numération interviennent :
– un premier type de discours sur le rapport dix entre les unités successives : 1 millier, c'est dix centaines, dix centaines c'est un millier, 1 unité, c'est dix dixièmes ;
– un deuxième type de discours sur la position des chiffres : le 1er, à partir de la droite est le chiffre des unités, le 2e est le chiffre des dizaines… ;
– un troisième type de discours sur la signification des préfixes métriques.
Savoir adapter une technique pour l'utiliser dans des contextes multiples est un signe du lien entre les connaissances, savoir que des techniques tirées de différents domaines permettent de traiter un même exercice en est un autre.

Retour au sommaire

Les ordres de grandeur des nombres

L'utilisation des unités métriques, notamment leurs ordres de grandeur, associées aux unités de numération tant pour l'aspect décimal que positionnel permet d'apprendre le système métrique mais aussi de consolider la numération et d'enrichir les représentations des nombres.

L'importance des unités de numération

Pour consolider les connaissances des élèves relativement aux unités de numération et aux rapports entre elles, il est nécessaire de diversifier leur utilisation dans les énoncés des exercices, de les « faire sortir » du tableau de numération. Elles seront ainsi plus disponibles notamment pour le calcul mental, les décimaux et le système métrique.

Une tâche clé

Les occasions de travailler les relations entre les unités, c'est-à-dire aussi l'aspect décimal de la numération, sont multiples. Les tâches du type « convertir 3 milliers en centaines » et « convertir 30 centaines en milliers » sont des leviers pour développer des techniques pour traiter des tâches dans plusieurs domaines des mathématiques.

Bibliographie

- **BEZOUT E., REYNAUD A.,** *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, 9e édition, 1821. Consulté le 13 décembre 2011, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table
- **CHAMBRIS C.,** *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du XXe siècle. Connaissances des élèves actuels,* Thèse, Paris, université Paris-Diderot, 2008.
- **COPIRELEM,** *Actes du XXXIe colloque sur la formation des maîtres* (Cédérom), Toulouse, IREM de Toulouse, 2005.
- **DEBLOIS L., «** Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire », *Recherches en didactique des mathématiques*, Revue *RDM*, vol. 16, La pensée sauvage, 1996, p. 71-128.
- **DURPAIRE J.L., MÉGARD M. (dir),** *Le Nombre au cycle 2,* Chasseneuil-du-Poitou, CNDP, 2010.
- **PAROUTY V.,** *Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3.* Commission Inter-IREM.
- **ROUCHE N. (dir),** *Du quotidien aux mathématiques : Nombres, grandeurs, proportions,* Paris, Ellipses, 2007.
- **TEMPIER F.,** *Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2, Grand N* 86, IREM de Grenoble, 2010, p. 59-90.
- **TEMPIER F.,** *Enseigner la numération décimale. Une ressource pour les enseignants du CE2,* 2011 (site internet) Consulté le 13 décembre 2011, http://numerationdecimale.free.fr/

Retour au sommaire

Partie 3

Calcul et conceptualisation

Denis Butlen et Pascale Masselot

Ce texte s'inscrit dans la continuité de celui paru dans la brochure *Le nombre au cycle 2*. Il en reprend quelques idées fortes, notamment la question des relations entre maîtrise de techniques de calculs, connaissances sur les nombres et les opérations et résolution de problèmes arithmétiques, et donc celle des liens entre sens et technique. Il prolonge la réflexion sur la spécificité du calcul mental et propose un éclairage sur les différentes modalités de calcul enseignées à l'école en s'appuyant sur les résultats des recherches en didactique des mathématiques portant sur la nature des savoirs à transmettre, mais aussi sur les apprentissages à provoquer chez les élèves en relation avec les pratiques des enseignants. Nous insistons ici encore sur la manière dont connaissances sur les nombres et les opérations et maîtrise de techniques de calcul mental se développent dialectiquement. Nous dégageons quelques pistes pour appréhender la cohérence et envisager les articulations entre les différentes modalités de calcul et ainsi s'interroger sur le niveau de conceptualisation relatif aux nombres et aux opérations auquel amener la majorité des élèves à la fin du cycle 3. Pour expliciter ce que nous entendons par l'expression « niveau de conceptualisation », prenons l'exemple des écritures fractionnaires. Différents sens de ces écritures, qui au départ n'ont pas vraiment un statut de désignation de nombre, mais apparaissent, par exemple, comme une manière de « décrire » le résultat d'un mesurage, seront introduits à l'école, permettant ainsi de manipuler ce qui aura ensuite le statut de nouveaux nombres, d'en découvrir les propriétés, de les utiliser dans des calculs, notamment dans le cas particulier des fractions décimales et permettront ensuite progressivement de construire le concept de nombre rationnel.

Nous ne revenons pas ici sur la définition du calcul, qui trouve son origine dans le mot latin *calculus*, terme qui renvoie aux cailloux que les romains utilisaient pour compter, et nous nous limitons aux différentes modalités de calcul abordées à l'école (même si les adjectifs associés au mot « calcul » ont pu changer), qu'est le calcul mental, le calcul posé (techniques opératoires reposant sur une part d'algorithmique), et le calcul instrumenté, tout en considérant les imbrications entre les trois.

Nous soulignons également les relations dialectiques existant entre sens et technique, le calcul étant vu comme un moyen d'acquérir des techniques et d'obtenir un résultat mais aussi un levier pour tester, produire, enrichir et développer des connaissances mathématiques.

Dans un premier temps, nous reviendrons sur les arguments de différents ordres qui contribuent à renforcer l'importance du calcul dans les apprentissages scientifiques puis nous présenterons plusieurs questions qui nous apparaissent comme cruciales pour un enseignant confronté à l'enseignement du calcul à l'école, questions que nous préciserons à travers un certain nombre d'exemples qui nous conduiront à évoquer les sites d'activités susceptibles de provoquer les apprentissages attendus chez les élèves.

Retour au sommaire

La nécessité du calcul aujourd'hui

À la suite du rapport Kahane[1] dont le chapitre 4 est consacré au calcul, nous retenons et développons quelques arguments de différents ordres qui confortent la nécessité de la pratique du calcul à l'école et reprenons à notre compte un certain nombre d'arguments que nous rapportons au contexte de l'école primaire. Autrement dit, nous cherchons à mieux préciser quel est l'enjeu de l'enseignement du calcul aujourd'hui.

Le calcul du point de vue du citoyen

Dans l'environnement du début du XXIe siècle, il convient de se poser la question de la nécessité de maîtriser certains savoirs. Si les « habiletés de calcul » attendues des élèves à la fin du cycle 3 ne peuvent seulement se justifier par leur mise en œuvre dans la vie quotidienne, il est indéniable qu'une des missions de l'école primaire est d'outiller tous les futurs citoyens pour faire face à des problèmes proches de ceux qui, pour un certain nombre, auront été abordés en classe. L'enseignement, et celui du calcul en particulier, doit aussi permettre d'élaborer des réponses à des situations qui peuvent être plus ou moins inédites, de prendre des initiatives, d'improviser et de mobiliser de manière moins directe les connaissances mathématiques acquises à l'école.
Les liens qu'entretiennent pratiques scolaires et pratiques de la vie quotidienne sont souvent complexes. Ainsi, des recherches effectuées au Brésil[2] sur la comparaison des méthodes de calcul mobilisées par des élèves dans leurs activités extrascolaires et celles mobilisées en classe montrent que sans un dispositif d'enseignement spécifique, ces élèves ne réinvestissent pas en classe les techniques parfois performantes mobilisées au dehors. L'une des explications apportées réside dans la non-reconnaissance par ces élèves, en classe, du contexte devant appeler ces procédures.
Trois grandes modalités de calcul, le calcul mental (pour obtenir un résultat exact ou approché), le calcul instrumenté et le calcul posé sont à développer à l'école primaire. Pour atteindre ces objectifs d'enseignement, il convient de considérer les liens et les articulations entre ces différents modes de calcul.
Aujourd'hui pour élaborer des contenus d'enseignement en matière de calcul, il ne suffit pas non plus de se demander quels sont les différents modes de calcul à maîtriser pour poursuivre une scolarité au collège et au lycée, voire au-delà. Il s'agit aussi, voire surtout, de « sensibiliser » les élèves aux différents modes de calcul, de considérer les tâches qui relèvent du calcul comme la constitution d'un domaine d'expériences sur les nombres et les opérations.

Le calcul dans les mathématiques, comme outil

Pour beaucoup d'élèves, le calcul est souvent identifié, voire assimilé aux mathématiques : « faire des mathématiques, c'est faire des calculs ». Or pour nous, faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes. Deux types de problèmes numériques au moins peuvent être rencontrés à l'école et permettent de développer

1. Kahane, 2001. Citons la première des raisons avancées par la commission pour le choix de faire un rapport sur le calcul : « le calcul est omniprésent dans les pratiques mathématiques, il est une composante essentielle à tous niveaux, inséparable des raisonnements qui le guident ou qu'en sens inverse il outille ».

2. Terezinha Nunes, Analúcia Dias Schliemann, David William Carraher, *Street mathematics and school mathematics*, Cambridge University Press, 1993.

Retour au sommaire

chez l'élève des attitudes complémentaires. Si le problème n'est pas « nouveau », c'est-à-dire si l'élève dispose déjà des connaissances nécessaires à sa résolution, donc s'il peut en quelque sorte agir en expert, résoudre le problème, c'est alors trouver la manière d'organiser les informations, de combiner les données numériques puis effectuer les calculs et interpréter les résultats en relation avec les questions initiales. Si le problème est nouveau et prétexte à élaborer de nouvelles connaissances, l'élève doit s'adapter en mobilisant des connaissances déjà là, à reconnaître l'insuffisance de ces dernières et à donner du sens à des connaissances nouvelles pour lesquelles de nouvelles opérations ou de nouveaux types de raisonnements seront à apprendre. Dans les deux cas, l'élève est amené à calculer.
Ainsi, si le calcul est inhérent aux pratiques mathématiques, et ceci à tous les niveaux, il serait très réducteur d'en rester à l'image qui consiste à considérer le calcul uniquement comme un outil au service des mathématiques. À l'intérieur même des mathématiques, il contribue lui-même à développer des concepts.

Le calcul pour les mathématiques

Nous reprenons à notre compte les propos de Artigue (2004) : « Le calcul est en quelque sorte partout dense dans l'activité mathématique et il est difficile de le circonscrire sans en développer une vision réductrice. »
En quoi les activités où intervient le calcul contribuent-elles à développer les différentes « qualités » à cultiver pour accéder aux apprentissages mathématiques ?
Nous lui empruntons également la formule « intelligence du calcul », qui en associant intelligence à calcul, vise à faire entendre que, derrière les différentes formes de calcul, dans les pratiques même les plus routinières, qu'il initie à tous les niveaux, une, voire des, intelligence(s) sont nécessaires. En effet, comme le souligne Artigue, il s'agira de : « Faire émerger l'intelligence qui est souvent à l'œuvre dans les activités de calcul même si elle reste invisible dans les traces ostensives de ce dernier, et de poser la question des moyens de cette intelligence et des conditions de son développement au sein de l'institution scolaire. »
Nous montrerons dans la seconde partie en quoi il nous paraît pertinent de parler d'intelligence à propos des différentes modalités de calcul et comment cette intelligence se manifeste au cours des différentes étapes, qu'il s'agisse d'élaborer des procédures de calcul, d'en automatiser certaines, de mettre en pratique des algorithmes, de les raffiner et de les prolonger, ou encore de faire des choix quant au mode de calcul à convoquer et d'exercer un contrôle à chaque moment.
Ce qui précède nous conduit à avancer que calcul et raisonnement ne doivent pas être opposés. En effet, mis à part lors de la mobilisation de résultats automatisés (ce que certains appellent des faits numériques[3]), tout calcul sollicite le raisonnement car même si à un certain moment, une part du calcul doit se routiniser, s'appuyer sur des répertoires de résultats comme de procédures qui ne peuvent être éternellement reconstruits mais doivent être mobilisables et disponibles, on peut dire, notamment dans l'activité de résolution de problème, que le calcul supporte le raisonnement. Nous détaillerons également ce point à travers des exemples.
Il ne faut pas minorer dans les activités de calcul, celles qui vont viser l'automatisation. Nous pensons que les connaissances à automatiser se situent à différents niveaux. En effet, il sera incontournable pour l'élève de pouvoir recourir, à un certain moment à des faits numériques mémorisés, c'est-à-dire à un répertoire, constitué de questions auxquelles l'élève répondra quasi « instantanément », sans avoir à

3. Par exemple « 2 et 2 font 4 » ou « $2 \times 6 = 12$ » ou encore « $17 + 3 = 20$ » qui peut devenir un fait numérique à un certain moment de la scolarité.

Retour au sommaire

reconstruire le résultat. Mais il faudra aussi que l'élève ait perçu que ces faits numériques à connaître sont des résultats « incontournables » car intervenant dans de nombreux calculs et qu'il sache les mobiliser à bon escient. L'automatisation pourra aussi se situer au niveau de certaines procédures qui relèvent non seulement du calcul posé, donc des techniques opératoires, mais également du calcul mental. La difficulté réside non seulement dans tout le travail menant à l'automatisation mais encore dans le fait que cette automatisation n'intervient pas exactement au même moment pour tous les élèves et que certains ont besoin de revenir au sens pour retenir. Selon les élèves, l'automatisation demandera plus ou moins de temps et le caractère mobilisable et disponible des « parties » automatisées sera perçu, reconnu plus ou moins facilement. Ainsi l'enseignant doit s'adapter et identifier les besoins de chacun de ses élèves dans ce domaine.

Calcul exact et calcul approché

Il nous semble important de faire la distinction entre calcul exact et calcul approché. Si le premier est le plus « pratiqué » à l'école, il convient d'accorder une place au second dès le cycle 2 et de le justifier notamment en termes de coût. La résolution de certains problèmes peut être facilitée par le recours à un ordre de grandeur obtenu par un calcul approché, en voici quelques exemples :
– « Avec un billet de 50 €, peut-on acheter une bande dessinée à 14,95 €, un livre à 37 € et un stylo à 8,25 € ? » ou « avec un billet de 50 €, peut-on acheter 6 lots de cahiers à 8,10 € le lot ? ».
– « Lorsque tu divises 6 327 par 9, tu trouves moins de 700 ? plus de 700 ?[4] »
– « Jules a utilisé sa calculatrice pour calculer 61,4 × 50,9, il trouve 2 925,26. Sans poser l'opération, explique pourquoi tu es certain qu'il s'est trompé en tapant sur les touches. »
Calcul exact et calcul approché permettent tous deux mais de manière différente une prise de recul sur le sens des nombres, la numération, le sens des opérations et favorisent également une certaine mise à distance dans la résolution de problème.
Nous développons dans la suite plusieurs exemples tant pour le calcul approché que pour le calcul exact.

Rapports entre calcul et instruments du calcul

Nous ne pouvons évoquer le calcul sans parler des instruments susceptibles d'être utilisés dans les activités qui en relèvent. De récents travaux de recherche[5] apportent des indications précieuses sur l'usage des instruments présents à l'école. Cet usage dépend notamment de la nature de l'instrument. Un instrument est un couple constitué d'un artefact et d'un schème d'utilisation. Pour un même calcul, selon que l'élève utilise une calculatrice ou un « abaque à tiges » (disponible dans beaucoup de classes), la suite des gestes nécessaires à effectuer et les connaissances numériques à convoquer sont différentes. Prenons l'exemple de « 254 + 87 ». Avec la calculatrice, il suffit à l'élève de savoir sur quelles touches il doit successivement appuyer (ici la suite des symboles mathématiques dans l'ordre de leur écriture de gauche à droite) pour voir le résultat s'afficher. En revanche, avec l'abaque, dans ce cas de l'addition de deux nombres, le premier est d'abord à représenter. Puis pour ajouter le second, l'élève doit le décomposer selon une décomposition

4. La réponse à cette question demande deux ordres de grandeur obtenus par des calculs approchés : évaluer le produit 700 × 9 et situer 6 300 par rapport à 6 327.
5. Trouche 2002, Mariotti et Maracci 2010.

Retour au sommaire

plus ou moins imposée (ajouter quatre-vingts peut consister à ajouter successivement vingt, donc deux sur la tige des dizaines, et encore vingt, etc. ou à ajouter 8 sur la tige des dizaines et ajouter 7 sur celle des unités), les échanges peuvent être réalisés dès qu'ils sont possibles au cours de l'action d'ajouter ou seulement à la fin lorsque tous les éléments ont été positionnés. Enfin la représentation obtenue doit être traduite en écriture chiffrée (ou en mots). Cet instrument peut être utilisé pour effectuer des calculs (addition, soustraction, multiplication par 10, 100…) faisant intervenir des nombres entiers naturels ou des nombres décimaux. Il prend en charge : la position, voire le nombre d'anneaux sur chaque tige (la longueur de cette dernière « alerte » en effet l'utilisateur sur la contrainte : ne pas dépasser neuf anneaux sur une tige). L'utilisateur doit gérer l'échange « dix contre un » ou « un contre dix » entre deux tiges placées côte à côte, et aussi la correspondance entre les deux désignations mobilisées : écriture chiffrée et quantités représentées.
Dans notre cas, alors que l'abaque impose la mobilisation de connaissances numériques, la calculatrice fonctionne comme une « boîte noire ». Ainsi cette dernière peut décharger l'élève d'une part des calculs au profit de la représentation du problème à résoudre ou de la mise en œuvre d'un algorithme (par exemple pour effectuer des multiplications intermédiaires, voire des soustractions dans le cas de la construction de la technique opératoire de la division).
À certains moments, pour le calcul mental, la droite numérique ou le tableau de nombres, les compteurs peuvent aussi être considérés comme des instruments de calcul. Prenons l'exemple du calcul « 35 – 18 », qui serait interprété comme la recherche de l'écart entre 18 et 35, la droite numérique aide à visualiser le fait qu'il est le même que celui entre 20 et 37 (décalage de 2) pour ensuite trouver 17. S'il est interprété comme la recherche du nombre à ajouter à 18 pour trouver 35, le tableau de nombres permet de passer de 18 à 38 (saut en avant de 20) puis de 38 à 35 (saut en arrière de 3). Avec le compteur, cela revient à chercher comment passer de l'affichage 18 à l'affichage 35, ajouter 2 pour afficher 20, puis ajouter 15 pour afficher 35.

Distinction calcul/comptage

Pour clore cette première partie, précisons sur un exemple ce qui distingue calcul et comptage lorsqu'il s'agit d'obtenir la réponse dans le cas d'un problème de dénombrement. Confronter un groupe de quatre élèves à la tâche « se répartir équitablement les cartes d'un jeu » ne signifie pas leur demander de « résoudre un problème de division ». Ils peuvent mettre en œuvre une procédure non numérique qui leur permettra de réaliser cette répartition : dans ce cas précis, une connaissance des jeux de cartes peut amener chacun à prendre les cartes d'une même couleur et le problème est résolu ! Il est également possible que chacun pioche simultanément le même nombre de cartes, par exemple, pour 32 cartes, 3 puis 3 puis 2. Reste à s'assurer, en mettant en œuvre une procédure de leur choix (correspondance terme à terme, ou comptage), que la contrainte « avoir le même nombre de cartes » est respectée. En revanche, le nombre 52 étant donné, demander de trouver combien chacun aura de cartes, donc d'anticiper le résultat du partage en quatre sans recourir à une représentation des 52 objets, pourra amener les élèves à mettre en œuvre une procédure de calcul, leur permettant de réaliser le pouvoir d'anticipation que donne la connaissance des nombres, voire du calcul. En effet, pour obtenir la réponse, le recours au calcul est alors nécessaire. Ici la division peut être mobilisée mais aussi l'utilisation de décompositions « astucieuses » des nombres pour obtenir la réponse : $52 = 40 + 12$ donc 10 cartes et 3 cartes, soit 13 cartes chacun ou $52 = 26 \times 2 = 13 \times 4$ en s'appuyant sur la connaissance des « moitiés ».

Retour au sommaire

Chacune de ces procédures relève du partage mais ne renvoie pas au même niveau de conceptualisation.
Ces préalables visaient à replacer le rôle du calcul par rapport aux apprentissages mathématiques et à en éclairer toutes les potentialités. Ces considérations doivent aider l'enseignant dans ses choix afin de respecter des équilibres entre les différents types de calcul, à amener l'élève à percevoir l'« intelligence du calcul », et à découvrir à travers sa pratique de calcul, la puissance des mathématiques tant en terme de technique que de conceptualisation.

Questions à propos du calcul et de la construction des connaissances numériques

Dans cette partie, nous énonçons un certain nombre de questions qui apparaissent comme cruciales aujourd'hui, soit pour l'institution soit pour les enseignants, à propos du calcul et du développement des connaissances numériques des élèves de cycle 3. Nous y apportons des éléments de réponses construits à partir d'expériences professionnelles d'enseignants et de formateurs mais aussi à partir de résultats de recherche en didactique des mathématiques.

Automatisation et adaptation

Quelle est la part d'automatisation et d'adaptation, de prise de décisions dans les techniques de calcul usuelles et standardisées ? Dans quelle mesure cette part d'adaptation convoque, enrichit, renforce ou développe des connaissances ? Comment y préparer les élèves ?
Les parts respectives d'automatisation et d'adaptation, voire d'improvisation diffèrent selon les modalités de calcul (mentale, écrite, instrumentée), selon les techniques de calcul mobilisées (standardisées ou non), selon les opérations et les nombres en jeu. Elles dépendent des connaissances des élèves, de leur familiarité avec les nombres et les opérations mais aussi de la nature des calculs à effectuer, de la taille et des propriétés des nombres présents dans ces calculs.
Développons ici quelques exemples relevant de différentes modalités de calcul.

Le calcul mental

Rappelons tout d'abord que le calcul mental nous semble un domaine privilégié pour développer les compétences numériques des élèves. Une pratique quotidienne permet réellement d'accroître leur familiarité avec les nombres et leurs propriétés. En effet, certains calculs ne peuvent être résolus aisément mentalement qu'en mobilisant des connaissances spécifiques sur les nombres et les propriétés des opérations en jeu.

Développons ici en détail un premier exemple, celui du calcul du produit 48 × 250.
Parmi les procédures mentales mobilisées par les élèves, trois catégories se dégagent : les simulations mentales de l'algorithme écrit, les calculs mobilisant des décompositions additives (et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) et ceux mobilisant des décompositions multiplicatives de l'un des facteurs. Dans chacun de ces cas, la part d'initiative, de prise de décisions et donc la capacité de l'élève à prendre en compte les propriétés des nombres en lien avec celles des

Retour au sommaire

opérations en jeu ne sont pas la même. La fréquentation de ces propriétés numériques est également différente.
Si l'élève simule complètement l'algorithme écrit, s'il « pose l'opération dans sa tête », il ne mobilise que peu de connaissances sur les nombres et il limite beaucoup ses chances de réussite, la charge en mémoire étant dans ce cas très importante (mémorisation des produits partiels dont les chiffres sont obtenus successivement en commençant par celui des unités, prise en compte des retenues intervenant dans chacun de ces produits partiels, puis addition des produits partiels…).
Au contraire, l'élève qui mobilise la décomposition multiplicative de 48 et conduit les calculs ci-dessous réduit considérablement le coût des calculs.

$$\boxed{48 \times 250 = 12 \times 4 \times 250 = 12 \times 1\,000 = 12\,000}$$ [6]

Mais il doit pour cela mobiliser des connaissances spécifiques à la fois sur le nombre 48 et sur le nombre 250 : reconnaître que 48 est un multiple de 4 (double du double de 12), avoir pris conscience que multiplier par 1 000 est souvent plus facile que multiplier par 250, et savoir que 250 est un diviseur de 1 000 et que 1 000 et 250 sont dans un rapport 4. Ces connaissances ne sont généralisables que dans un contexte bien précis : multiplication d'un multiple de 4 par 25, 250, 2 500…

Ces moments de calcul mental débouchent sur des institutionnalisations « souples ». À partir d'une comparaison en termes de coût, l'enseignant amène les élèves à hiérarchiser les procédures mises en œuvre. Si une procédure experte n'a pas été produite par la classe et si une telle procédure n'est pas trop éloignée des procédures mobilisées par les élèves, il l'introduit et demande aux élèves de la tester, d'évaluer son domaine d'efficacité. Ainsi l'institutionnalisation porte à la fois sur la procédure et sur son domaine d'efficacité. Elle doit être suffisamment explicite pour permettre aux élèves de choisir à bon escient la procédure la plus efficace mais aussi suffisamment souple pour permettre à ceux qui n'en sont pas encore capables de continuer provisoirement à mobiliser les procédures qui leur sont plus familières, même si elles sont moins efficaces, moins rapides ou moins sûres.

Nous avons constaté que, pour le calcul du produit de deux nombres à deux chiffres, les procédures majoritaires sont des procédures intermédiaires entre les deux précédentes, s'appuyant le plus souvent sur des décompositions additives liées à la numération décimale[7] et sur des décompositions multiplicatives partielles. Ainsi, si l'élève décompose additivement l'un des facteurs comme ci-dessous, son calcul peut être facilité par le recours à des produits « remarquables » du type $4 \times 250 = 1\,000$ ou $4 \times 25 = 100$; ou encore $50 = 100 : 2$ ou 50 est la moitié de 100 ou $50 = \frac{1}{2} \times 100$; $25 = 100 \div 4$ ou 25 est le quart de 100 ou $25 = \frac{1}{4} \times 100$.

Ces derniers doivent, pour être mobilisés, prendre le statut de faits numériques mémorisés, disponibles, et donc automatisés. Dans un premier temps, des calculs du type « 12 × 25 », « 16 × 25 », « 32 × 25 », « 48 × 25 », etc. pourront être proposés. Ces pratiques peuvent faciliter le traitement de calculs du type 48 × 250 à propos duquel nous décrivons ci-dessous plusieurs chemins de calcul possibles. Pour chacun, la charge en mémoire reste lourde puisqu'il y a plusieurs termes à gérer simultanément.

6. Notons que cette procédure diffère de celle qui consisterait à dire « multiplier par 250, c'est multiplier par 1000 puis diviser par 4, ou encore diviser par 4 puis multiplier par 1 000 » car ici seule l'associativité de la multiplication est mobilisée « en acte ».
7. Nous parlerons dans ce cas de décomposition additive canonique.

Retour au sommaire

– décomposition additive canonique de 250[8] :

$48 \times 250 = 48 \times 200 + 48 \times 50 = 48 \times 2 \times 100 + 48 \times 5 \times 10 = 96 \times 100 + 240 \times 10$

$48 \times 250 = 9\,600 + 2\,400 = 12\,000$

ou

$48 \times 250 = 48 \times 200 + 48 \times 50 = 48 \times 2 \times 100 + 48 \times 100 \div 2 = 96 \times 100 + 4\,800 \div 2$

$48 \times 250 = 9\,600 + 2\,400 = 12\,000$

Etc.

– décomposition additive canonique de 48 : ici 48 multiplié par 250 est « traduit » en 48 fois le nombre 250, soit 40 fois 250 plus 8 fois 250

$48 \times 250 = 40 \times 250 + 8 \times 250 = 4 \times 10 \times 25 \times 10 + 2 \times 4 \times 25 \times 10$

$48 \times 250 = 4 \times 25 \times 10 \times 10 + 2 \times 4 \times 25 \times 10 = 100 \times 10 \times 10 + 2 \times 100 \times 10$

$48 \times 250 = 10\,000 + 2\,000 = 12\,000$

$48 \times 250 = 40 \times 250 + 8 \times 250 = 4 \times 250 \times 10 + 8 \times 250 = 1\,000 \times 10 + 1\,000 \times 2$

$48 \times 250 = 10\,000 + 2\,000 = 12\,000$

Etc.

Ceci illustre, dans le cas particulier du calcul mental, l'intelligence du calcul et les raisonnements associés.

Nous citons plus rapidement quelques exemples qui permettent de renforcer notre propos :

Le calcul du produit 96 × 125

– décomposition additive de 96 s'appuyant sur la numération orale et connaissance du produit « remarquable » $8 \times 125 = 1\,000$:

$96 \times 125 = (80 + 16) \times 125 = 80 \times 125 + 16 \times 125 = 10 \times 8 \times 125 + 2 \times 8 \times 125$

$96 \times 125 = 10 \times 1\,000 + 2 \times 1\,000 = 10\,000 + 2\,000 = 12\,000$

– décomposition multiplicative de 96 et connaissance du produit « remarquable » $8 \times 125 = 1\,000$:

$96 \times 125 = 12 \times 8 \times 125 = 12 \times 1\,000 = 12\,000$

mais aussi

$96 \times 125 = 48 \times 2 \times 125 = 48 \times 250 = 24 \times 2 \times 250 = 24 \times 500 = 12 \times 2 \times 500$

$96 \times 125 = 12 \times 1\,000 = 12\,000$

Le calcul du quotient 28 056 ÷ 7

– décomposition additive de 28 056 s'appuyant sur la numération orale et connaissance du répertoire multiplicatif (« table de 7 ») :

$28\,056 \div 7 = (28\,000 + 56) \div 7 = 28\,000 \div 7 + 56 \div 7 = 4\,000 + 8 = 4\,008$

Le calcul du quotient 55 033 ÷ 11

– décomposition additive de 55 033 s'appuyant sur la numération orale et connaissance de la procédure pour multiplier un nombre à un chiffre par 11 :

$55\,033 \div 11 = (55\,000 + 33) \div 11 = 55\,000 \div 11 + 33 \div 11 = 5\,000 + 3 = 5\,003$

Le calcul du quotient 38 974 ÷ 13

– décomposition soustractive de 38 974 :

$38\,974 \div 13 = (39\,000 - 26) \div 13 = 39\,000 \div 13 - 26 \div 13 = 3\,000 - 2 = 2\,998$

Cet exemple permet d'amener les élèves à reconnaître le gain en termes de coût de certaines techniques de calcul mental en les comparant avec la mise en œuvre de l'algorithme de la division.

8. Pour des raisons de facilité de lecture, nous traduisons la démarche de l'élève de manière formalisée, en utilisant des signes mathématiques. Cette formalisation n'est pas attendue des élèves. Elle a cependant un intérêt pour les apprentissages mais cela constitue un autre travail. À l'oral, l'élève peut dire « 250 fois 48, c'est 200 fois 48, plus 50 fois 48 ; pour multiplier 48 par 200, je multiplie d'abord 48 par 2 (soit 40 par 2; 80 et 8 par 2, 16) donc 96 puis 96 par 100, donc 9 600 ; 48 multiplié par 50, c'est la moitié de 48 multiplié par 100, donc la moitié de 4 800, donc 2 400 ; et 9 600 plus 2 400, c'est 9 600 plus 400, 10 000 et 10 000 plus 2 000, 12 000. »

Retour au sommaire

Développons un dernier exemple, **pour le calcul de la différence : 7 432 – 1 456**

– utilisation d'une propriété de la soustraction « conservation de la différence en ajoutant (ou enlevant) le même nombre aux deux termes » et connaissance des compléments à 10

7 432 – 1 456 = (7 432 + 4) – (1 456 + 4) = 7 436 – 1 460 = (7 436 + 40) – (1 460 + 40)

7 432 – 1 456 = 7 476 – 1 500 = (7 476 + 500) – (1 500 + 500) = 7 976 – 2 000 = 5 976

– utilisation de la relation addition/soustraction et connaissance des compléments à 10 (avec écriture des résultats intermédiaires)

1 456 pour aller à 1 460 → 4 ; 1 460 pour aller à 1 500 → 40 ;
1 500 pour aller à 2 000 → 500 et 2 000 pour aller à 7 432 → 5 432
Et 5 432 + 500 + 40 + 4 = 5 932 + 40 + 4 = 5 972 + 4 = 5 976

Le calcul mental peut donc favoriser le développement de compétences permettant à l'élève de s'adapter aux calculs, d'explorer les propriétés des nombres et des opérations. Toutefois nos recherches[9] montrent que certaines conditions (prérequis et cheminements cognitifs) doivent être réalisées pour que ce soit le cas. Rappelons certaines d'entre elles.
L'enseignement du calcul mental est paradoxal. Pour qu'il produise suffisamment d'effets positifs sur les apprentissages numériques des élèves, il est nécessaire de développer une posture d'adaptabilité chez eux. Pour qu'ils soient amenés à explorer les propriétés numériques des nombres et des opérations, il est indispensable qu'ils mettent suffisamment à distance les techniques de calculs standardisées (notamment les algorithmes écrits) souvent considérées comme sûres et fiables pour mobiliser des procédures plus adaptées, plus économiques mais présentant un domaine d'efficacité limité. Pour que les élèves échappent à une « posture se caractérisant par un recours systématique à des automatismes[10] », des procédures élémentaires automatisées, des faits numériques mémorisés doivent être installés. Échapper à une posture d'automate nécessite des automatismes.

Des activités préparatoires
Il est profitable de prévoir des activités systématiques visant à installer ces connaissances préalables. Afin de favoriser le réinvestissement de faits numériques ou de procédures de calculs élémentaires lors de procédures plus complexes, afin de rendre disponibles ces connaissances, il est souhaitable de présenter un même calcul de différentes manières. Prenons l'exemple du produit 9 × 6 = 54. Des consignes différentes peuvent amener à rendre disponible ce fait numérique :
– demander la restitution à l'oral ou à l'écrit, la question étant elle-même présentée oralement ou sous une forme écrite (écriture lacunaire ou autre) :
  • du résultat : à quoi est égal 9 multiplié par 6 ? ou 9 × 6 = ?
  • de l'un des facteurs (multiplication à trous) : 9 × ? = 54 ou ? × 6 = 54 ? ou ? × 9 = 54 ou 6 × ? = 54
  • des deux facteurs : 54 = ? × ?
– demander de trouver des (toutes les) décompositions multiplicatives de 54 faisant intervenir deux, trois ou quatre facteurs
– faire le lien avec la division :
  • Quel est le quotient de 54 par 6 ?
  • Quel est le quotient de 54 par 9 ?
  • 54 divisé par 6 égal = ? ou 54 ÷ 6 = ?
  • 54 divisé par 9 ? ou 54 ÷ 9 = ?

9. Butlen 2007.
10. Notamment la simulation mentale de techniques opératoires écrites.

Retour au sommaire

– faire le lien avec la notion de multiple ou de diviseur :
  • 54 est-il un multiple de 6 ? 54 est-il multiple de 9 ?
  • 6 divise-t-il 54 ? 6 est-il un diviseur de 54 ? 9 divise-t-il 54 ? 9 est-il un diviseur de 54 ?
  • Quel est le reste de la division de 54 par 6 ? Quel est le reste de la division de 54 par 9 ?
– réinvestir ce fait numérique dans des calculs plus complexes :
  • $60 \times 9 = ?$
  • $540 \div 60 = ?$
  • $5\,400 = 900 \times ?$
  • $0{,}6 \times 9 = ?$
  • $5{,}6 \div 9 = ?$
– faire le lien avec les écritures fractionnaires :
  • Quel est le nombre entier juste avant $\frac{54}{9}$? Écrire $\frac{54}{9}$ comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 ou trouver l'encadrement entre deux entiers consécutifs de $\frac{54}{9}$…

Importance des prérequis
Nous avons constaté que pour qu'une pratique quotidienne de calcul mental se traduise par un enrichissement des connaissances numériques des élèves et de leurs capacités à s'adapter aux calculs, il était nécessaire que des prérequis soient installés. Dans l'exemple de calcul détaillé ci-dessus, pour que l'élève mobilise avec succès une procédure s'appuyant sur des décompositions additives et multiplicatives, il est nécessaire que ces dernières soient non seulement connues mais disponibles afin d'être rappelées lors du calcul. Or, nous avons établi que des connaissances numériques insuffisantes, des faits numériques non suffisamment mémorisés mais aussi des modules élémentaires de calcul insuffisamment automatisés limitaient les possibilités d'adaptation des élèves. Ce constat est particulièrement vérifié pour les élèves manifestant des difficultés en mathématiques.

Limites des activités ciblant les prérequis
Toutefois, il est nécessaire de préciser que des activités visant à combler les prérequis absents ne peuvent permettre à elles seules le dépassement des difficultés évoquées plus haut. Il est nécessaire de les inscrire dans un ensemble visant à favoriser les réinvestissements dans d'autres contextes des connaissances construites à propos de situations particulières. Nous reviendrons sur cette question par la suite.

Dans le cadre d'un calcul mental, le recours à un support écrit pour noter des résultats intermédiaires lors de calculs mentaux change le coût en mémoire des procédures mais il joue aussi sur le recours à des algorithmes automatisés ou à des procédures plus standards.
Le calcul « en ligne » ouvre d'autres pistes pour amener les élèves à réfléchir sur les nombres et les propriétés des opérations. Ainsi dans le but de revisiter une des étapes de la construction de la technique opératoire de la multiplication, à l'occasion du calcul « en ligne » du produit 48×250, on pourra s'intéresser à la mise en œuvre de la procédure s'appuyant sur la décomposition des deux facteurs dite de « double distributivité »[11] :

$$\boxed{48 \times 250 = (40 + 8) \times (200 + 50) = 40 \times 200 + 8 \times 200 + 40 \times 50 + 8 \times 50}$$

11. En mettant en évidence le lien entre cette écriture et les calculs s'appuyant sur un découpage de grilles ou de tableaux.

Retour au sommaire

En effet, le coût en mémoire est minimisé et les produits partiels sont plus faciles à traiter car ils se ramènent, moyennant l'utilisation de la propriété d'associativité de la multiplication, aux tables de multiplication par 2, 4 et 5. Plus généralement le recours à une trace écrite permet non seulement un traitement spécifique mais peut aussi constituer un entraînement à une certaine forme de calcul mental.
Notons que ces écritures ne sont pas le seul support : un calcul de soustraction ou d'addition s'appuyant sur la droite numérique permet de « visualiser » certaines des décompositions additives ou soustractives des nombres intervenant dans le calcul ou d'obtenir le résultat sous la forme d'une décomposition additive ; la droite numérique constitue alors un support opératoire.
Prenons par exemple le calcul 354 – 87. Avec le support de la droite numérique, l'élève pourra par exemple déterminer l'écart entre 354 et 87 par étapes (correspondant à des « sauts » sur la droite numérique) ou encore retrancher par étapes 87 de 354 en retranchant successivement 54 puis 30 puis 3 à 354 ; chaque retrait étant là encore associé à un « saut » sur la droite numérique.

Les techniques opératoires de l'addition, de la soustraction et de la multiplication

Lorsqu'une technique est construite et maîtrisée, sa mobilisation (par écrit) relève de l'automatisme, l'élève n'a pas beaucoup « d'initiative » à prendre dans le déroulement du calcul. Il traite séparément les chiffres des différents nombres et inscrit les résultats successifs en respectant certaines conventions qui prennent en charge des éléments relatifs à notre numération écrite. Les étapes s'enchaînent, les connaissances mobilisées relèvent du répertoire additif (intégrant soustraction et recherche du complément) et du répertoire multiplicatif ; le respect de la disposition et de l'écriture des chiffres garantissant pour une part le résultat final. En revanche, l'élève doit prendre des initiatives en rapport avec les nombres en jeu pour contrôler le résultat de son calcul final mais aussi des calculs partiels. Une connaissance des ordres de grandeur notamment, un entraînement à la mobilisation de calcul approché peuvent s'avérer très utiles voire indispensables pour certains. Bien sûr, la décision de recourir ou non à l'algorithme écrit, donc le fait de savoir identifier un calcul facile ou non, selon le contexte de l'activité relève également de cette prise d'initiative.
Enfin, précisons que les remarques que nous venons de faire ne sont valides que lorsque la technique opératoire est bien maîtrisée, ce n'est pas le cas lors de sa construction. En effet, cette dernière pour être cohérente mais aussi efficace nécessite justement souvent l'optimisation (grâce à un jeu sur les contraintes, sur les variables numériques et sur les coûts en calcul, en temps et en mémoire) de techniques plus « primitives », moins « expertes » et nécessitant une plus grande part d'adaptation et des décisions locales.
Au cycle 3, les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction sont déjà installées, nous suggérons cependant, avant de les prolonger au domaine numérique des nombres décimaux, ce qui constituera une manière de les revisiter, de les « mettre à l'épreuve » pour mesurer la « robustesse de leur installation ». Voici quelques pistes de travail.
– dans le cas de l'addition, l'enseignant pourra jouer sur le nombre de termes et sur les propriétés des nombres.
Prenons par exemple le calcul en colonne suivant : 10 273 + 16 + 5 084 + 807

Retour au sommaire

$$\begin{array}{rr} & {\scriptstyle 1\ 1\ 2\ \ } \\ & 10273 \\ + & 16 \\ + & 5084 \\ + & 807 \\ \hline & 16180 \end{array}$$

Il permet de montrer que les spécificités des nombres choisis (nombres de chiffres différents, présence de zéros dans les nombres choisis et dans le résultat) amènent l'élève à mobiliser les compléments à 10 ou à la dizaine supérieure (moyennant l'utilisation de la commutativité), examiner les retenues, en particulier le fait que, dans l'addition, la retenue n'est pas toujours égale à « 1 », etc.

– les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction peuvent également être réinterrogées dans le cas de leur utilisation avec des nombres sexagésimaux[12].

– de même, pour la multiplication, il est possible de s'assurer de la robustesse des connaissances en jouant sur les variables numériques notamment en choisissant des nombres dont l'écriture comporte des zéros, ou des nombres tels que des « zéros apparaissent » dans les produits intermédiaires comme :

$$\begin{array}{r} 504 \\ \times\ 27 \\ \hline 3\,528 \\ 10\,080 \\ \hline 13\,608 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,555 \\ \times\ 36 \\ \hline 33\,330 \\ 166\,650 \\ \hline 199\,980 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \times\ 5\,555 \\ \hline 180 \\ 1\,800 \\ 18\,000 \\ 180\,000 \\ \hline 199\,980 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,048 \\ \times\ \ 205 \\ \hline 15\,240 \\ 609\,600 \\ \hline 624\,840 \end{array}$$

Notons que ces calculs nécessitent une compréhension « fine » de la technique notamment une gestion maîtrisée des retenues. Là encore, l'enseignant pourra montrer la pertinence de certains outils de contrôle comme par exemple les ordres de grandeur ou le recours à l'opération « inverse », comme utiliser l'addition pour vérifier le résultat de la soustraction.

Le cas particulier de la division

À la différence des trois techniques évoquées ci-dessus, la mise en œuvre d'une technique de la division, même maîtrisée, demande des prises de décisions, des adaptations locales, des initiatives indispensables à sa réussite. Il est par exemple nécessaire lors de sa construction de comprendre les étapes de l'algorithme en référence à la numération et au sens de la division qui aura été privilégié (recherche du nombre de parts ou recherche de la valeur d'une part). Des ordres de grandeurs sont alors systématiquement convoqués. Les tables de multiplications sont dans un premier temps mobilisées « à l'envers ».

Prenons l'exemple de 5 337 ÷ 26

$$\begin{array}{rcccc|l} & 5 & 3 & 3 & 7 & 2\ 6 \\ \cline{6-6} - & 5 & 2 & & & 2\ 0\ 4 \\ \cline{2-3} & & 1 & 3 & 7 & \\ & - & 1 & 0 & 4 & \\ \cline{3-5} & & & 2 & 3 & \end{array}$$

12. Comme par exemple l'addition « 2 h 35 min 20 s plus 24 min 50 s » ou la soustraction « 2 h 35 min 45 s moins 40 min 50 s ».

Retour au sommaire

L'encadrement 2 600 < 5 337 < 26 000 permet de donner un premier ordre de grandeur du quotient, se situant entre 100 et 1 000, ce dernier comportera trois chiffres. Lors de la détermination d'un chiffre du quotient à une étape donnée, il est nécessaire de faire appel à des décompositions multiplicatives (encadrer un nombre entre deux multiples consécutifs du diviseur) qui doivent ensuite être recomposées puis de gérer les deux nombres obtenus, de leur donner du sens pour produire l'égalité associée (5 337 = 26 × 204 + 23) et/ou pour répondre à la question posée.
Notons que ces adaptations et décisions locales sont d'autant plus nécessaires que la technique maîtrisée est sophistiquée (déterminer le nombre de chiffres du quotient, poser ou non des soustractions, écrire ou non des produits partiels : 26 × 2 ; 26 × 4, etc.).
Là aussi les moyens de contrôle de l'élève sur la mise en œuvre, le déroulement des calculs et leur pertinence nécessitent des capacités d'adaptation indéniables. Précisons enfin que le recours partiel à la calculatrice, s'il minimise les rappels de faits numériques nécessite en revanche une plus grande vigilance de la part de l'élève : utiliser à bon escient le résultat fourni, repérer le pas de l'algorithme suivant à réaliser, etc.
À travers les exemples suivants, nous illustrons notre propos à partir d'un choix judicieux des variables numériques, pour montrer que l'idée serait de ne pas « mettre de la complexité partout ». Dans l'exemple ci-dessus, ainsi que dans le suivant ci-dessous, les chiffres du quotient sont simples à trouver mais il faut gérer les zéros, par exemple en utilisant un encadrement pour estimer l'ordre de grandeur du quotient.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 7 & 7 & 9 & 8 & 37 \\ \cline{6-6}
- & 7 & 4 & & & 210 \\ \cline{2-3}
 & & 3 & 9 & & \\
 & - & 3 & 7 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & 8 &
\end{array}$$

Les exemples suivants illustrent le fait que la complexité n'est pas toujours liée à la « taille » des deux premiers nombres mais davantage aux relations entre eux qui seront plus ou moins évidentes pour les élèves.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 1 & 6 & 9 & 1 & 21 \\ \cline{6-6}
- & 1 & 6 & 8 & & 80 \\ \cline{2-4}
 & & & 1 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 & 58 \\ \cline{7-7}
- & 5 & 8 & & & & 1212 \\ \cline{2-3}
 & 1 & 2 & 3 & & & \\
- & 1 & 1 & 6 & & & \\ \cline{2-4}
 & & & 7 & 0 & & \\
 & & - & 5 & 8 & & \\ \cline{4-5}
 & & & 1 & 2 & 0 & \\
 & & - & 1 & 1 & 6 & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 4 &
\end{array}$$

	6	0	0	0	67
–	5	3	6		89
		6	4	0	
	–	6	0	3	
			3	7	

		5	4	8	8
	–	4	8		68
			6	8	
		–	6	4	
				4	

Proposer régulièrement, voire systématiquement de développer des arguments pour situer des nombres les uns par rapport aux autres, pour évaluer un ordre de grandeur d'un calcul dont la précision devra prendre en compte le contexte, permettra aux élèves de prendre du recul par rapport au sens et aussi par rapport aux algorithmes.

Liens entre techniques de calcul et conceptualisation

Quels liens entretiennent calcul mental, développement des connaissances numériques et/ou résolution de problèmes ?
Maîtrise des techniques de calculs et connaissances numériques se développent en étroites relations, de manière dialectique. Plusieurs travaux de recherche, en didactique des mathématiques mais aussi en psychologie cognitive le montrent. L'une n'est pas première devant l'autre.
Développons deux exemples de résultats de recherches relatives aux effets d'une pratique régulière de calcul mental.

Habiletés calculatoires et résolution de problèmes standard

Après avoir développé les compétences calculatoires des élèves de deux classes de CM2 grâce à une pratique de calcul mental quotidienne, nous avons soumis ces élèves et ceux de deux classes témoins (niveaux de performances en mathématiques et origines socioprofessionnelles semblables) à un test afin d'évaluer leurs compétences relatives à la résolution (mentale et écrite) de problèmes numériques standards.
Nous entendons par problèmes numériques standards, des problèmes faisant intervenir une ou plusieurs opérations dont la reconnaissance est exigible par des élèves de ce niveau, et dont l'énoncé s'inscrit dans le corpus habituel des manuels scolaires. Ces énoncés ne présentent pas de difficultés particulières de vocabulaire ou de syntaxe. La réussite à ces problèmes renseigne sur le degré d'acquisition de grands concepts enseignés à l'école élémentaire (structures additives et multiplicatives, proportionnalité).
Les énoncés de problèmes sont construits afin d'évaluer le degré d'automatisation de la reconnaissance de l'opération sous-jacente par les élèves de fin d'école primaire. Pour concevoir le corpus de problèmes, nous avons pris en compte la nature des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) et le nombre de données numériques (2 données, 3 données, une donnée inutile).

Nous avons aussi défini deux degrés de complexité des problèmes[13], désignés par « simple » ou « complexe ». Nous avons croisé la variable « type d'opération » avec les variables « nombre de données numériques « et « degré de complexité ». À chacune des quatre opérations, correspondent ainsi six énoncés de problèmes (3 problèmes simples et 3 problèmes complexes). Ce qui représente donc 24 problèmes différents.
Pour **l'addition**, nous considérons comme problèmes « simples », les problèmes de composition de mesures (réunion) ou ceux faisant intervenir le calcul d'un état final (sens « ajouter » ou « avancer »). Nous considérons comme problèmes « complexes », les problèmes de calcul d'un état initial[14] ou ceux faisant intervenir une composition de transformations positives[15].
Pour **la soustraction**, de la même façon, nous considérons comme problèmes « simples », soit les problèmes de recherche du complément, soit les problèmes de calcul d'un état final (sens « enlever » ou « reculer »). Nous considérons comme problèmes « complexes » soit les problèmes de calcul d'un état initial[16], soit les problèmes de composition de transformations positives et négatives.
Pour **la multiplication**, nous considérons comme « simples », les problèmes d'addition réitérée ou de calcul du cardinal d'une collection discrète pouvant se représenter par une « grille rectangulaire ». Nous considérons comme « complexes », les problèmes de combinatoire[17] (recherche de tous les possibles) et ceux faisant intervenir un calcul d'aire ou de volume.
Pour **la division**, nous considérons comme « simples », les problèmes de partage ou de répartition (reste nul). Les problèmes de division avec trois données n'étant pas adaptés, nous proposons à la place des problèmes de division avec reste non nul. Les problèmes dits « complexes » sont des problèmes faisant intervenir l'inverse d'une multiplication ou la recherche d'une dimension dans un calcul d'aire ou de volume.
Dans le cadre de la recherche, les élèves devaient résoudre ces problèmes mentalement puis quelques semaines après par écrit.
Nous avons analysé les résultats des élèves des différentes classes (entraînées et témoins) en comparant leurs performances, le nombre et la « qualité » des erreurs produites. Pour analyser les performances des deux types de classes, nous avons pris en compte le « degré de complexité » des problèmes et le « type d'opérations mobilisées ». Ces deux critères permettent de définir des degrés de familiarisation des élèves de CM2 avec les problèmes du test. Les problèmes que nous qualifions de « familiers » sont soit des problèmes additifs complexes (en particulier ceux faisant intervenir des compositions de transformations), soit des problèmes multiplicatifs faisant intervenir une addition réitérée, une division ou un calcul d'aire. Un élève de dernière année de l'école élémentaire a rencontré ce type de problèmes à plusieurs reprises mais la reconnaissance du modèle sous-jacent n'est pas entièrement automatisée. Nous appelons « très familiers » les problèmes additifs simples tels que la reconnaissance du modèle est quasi automatisée. Au contraire, les problèmes faisant intervenir un calcul de volume ou de cardinal d'un produit cartésien sont

13. Le degré de complexité prend en compte certaines caractéristiques du problème : présence de mesures, de relations liant ces mesures, de transformations opérant sur une mesure… Nous prenons en compte également le point de vue privilégié dans le problème : addition réitérée ou mesure produit pour la multiplication par exemple.
14. Faisant intervenir une transformation négative.
15. Par exemple : « Pendant la récréation, Alain joue trois parties de billes. Il gagne 10 billes au cours de la première partie, il gagne 3 billes à la deuxième partie et il gagne 8 billes au cours de la troisième partie. A-t-il plus ou moins de billes après la récréation ? Combien en plus ou en moins ? »
16. Faisant intervenir une transformation positive.
17. Par exemple : « Un restaurant propose un menu à 15 €. Il y a trois choix possibles pour l'entrée, quatre choix possibles pour le plat principal et trois choix possibles pour le dessert. Combien de menus différents peut-on constituer ? »

Retour au sommaire

relativement nouveaux pour des élèves de dernière année de l'école élémentaire qui reconnaissent difficilement le modèle sous-jacent : ils sont dits « non familiers ».
L'analyse des performances des élèves fait apparaître les résultats suivants : une plus grande aisance calculatoire due à une pratique régulière de calcul mental réduit le nombre des erreurs (de calculs ou de tri de données) produites par les élèves en résolution mentale comme en résolution écrite. Une plus grande habileté calculatoire a également des effets sur la reconnaissance de l'opération arithmétique à effectuer. Le nombre des erreurs de modèle est plus faible. Les performances des élèves sont ainsi nettement meilleures lors de la résolution mentale et écrite des problèmes additifs complexes et lors de la résolution écrite des problèmes multiplicatifs simples et plutôt familiers. Ce sont donc en général les problèmes familiers qui sont concernés. L'exemple type semble être celui des problèmes additifs complexes faisant intervenir des compositions de transformations. Dans ce dernier cas, l'impact est sensible en résolution mentale comme en résolution écrite.
Tout se passe comme si un entraînement au calcul mental, en améliorant les habiletés calculatoires des élèves, favorisait une « prise de sens » et contribuait ainsi à accélérer le processus d'automatisation de la reconnaissance des opérations.

Habiletés calculatoires et résolution d'un problème de proportionnalité

Dans le cadre d'une recherche[18], nous avons posé le problème suivant à des élèves de CM2 entraînés au calcul mental :

> 8 oranges coûtent 4 €, 7 poires coûtent 4 € et 3 citrons coûtent 2 €, quel est le fruit le plus cher, quel est le fruit le moins cher ? Justifie ta réponse.

Ce problème apparaît comme particulièrement difficile pour des élèves de CM2. Il n'est pas reconnu dans un premier temps comme un problème de proportionnalité mais traité comme un problème de division. Un nombre conséquent d'élèves est incapable d'amorcer une quelconque procédure de résolution. Pour déterminer le prix unitaire de chaque fruit, les autres élèves mettent en œuvre plusieurs types de stratégies : la division, la recherche de ce prix par essai et erreur en résolvant des multiplications à trous ou encore des mises en relation des rapports entre nombre de fruits et prix. Très peu d'élèves reconnaissant un problème de proportionnalité, mobilisent une procédure du type : « 8 oranges coûtent 4 €, 7 poires coûtent 4 €, 6 citrons coûtent 4 € donc le fruit le plus cher est le citron et le fruit le moins cher est l'orange. » Une étude qualitative des performances et stratégies d'élèves nous a permis de constater que les élèves ayant bénéficié d'une pratique régulière de calcul mental se distinguaient de leurs pairs par une capacité plus grande à envisager et explorer différents types de procédures et se révélaient de ce fait plus performants.
Ces deux exemples montrent que si la maîtrise des techniques opératoires n'est pas première par rapport à la construction du sens des opérations inversement, la construction du sens n'est pas première par rapport à la maîtrise des techniques.

À propos de la gestion de séances de calcul mental

Quelles formes peuvent prendre les moments de calcul mental, quelle gestion adopter et plus particulièrement quand, comment et quels savoirs peut-on institutionnaliser ?
Les séances visant la construction des techniques opératoires sont en général largement détaillées dans les ressources que sont les manuels scolaires. Nous précisons

18. Butlen, Pézard 2003.

Retour au sommaire

ici les différentes formes que peuvent prendre les séances de calcul mental pour répondre aux différents objectifs mis en évidence dans le paragraphe « automatisation et adaptation ». Nous distinguons au moins cinq formes d'activités qui se distinguent par leur enjeu et par leur durée.

Première forme (10 à 15 minutes) : tous les jours, souvent avant la séance de mathématiques, les élèves doivent résoudre quelques exercices mentalement (par exemple selon le procédé La Martinière). L'objectif de ces séances est d'entraîner les élèves, de travailler la mémorisation de faits numériques, de « routiniser » certaines procédures. Les corrections sont alors rapides, l'enseignant vise ici un certain degré de performance.

Deuxième forme (entre 20 et 40 minutes) : une fois par semaine, l'objectif est d'amener collectivement les élèves à expliciter les procédures mises en œuvre, à les comparer, à évaluer leur domaine d'efficacité, à les hiérarchiser (en fonction notamment de leur efficacité et de leur économie), d'introduire si besoin d'autres procédures (expertes) et de les comparer aux précédentes. Il s'agit ici à la fois d'enrichir l'espace des procédures existant dans la classe et de faire des institutionnalisations locales et souples. Par exemple, à propos du calcul 48 × 250 déjà évoqué, l'institutionnalisation pourra porter sur les procédures de calculs de produits de 250 (ou de 25×10^n) par un nombre multiple de 4 en mettant en évidence leur domaine de validité.

Troisième forme (10 à 15 minutes, fréquence variable selon la progression adoptée) : les élèves doivent résoudre mentalement des problèmes numériques (standards). Notons que ceux-ci peuvent aussi être proposés lors des séances ci-dessus, en plus des calculs « décontextualisés ». Ici les données numériques sont adaptées à un traitement en calcul mental mais les calculs à effectuer ne sont pas explicitement donnés. L'enjeu est simultanément un travail sur le sens des opérations et la mobilisation de procédures de calcul mental. De manière dialectique, le contexte des problèmes peut contribuer à expliciter certaines procédures de calcul mental[19]. De plus un certain nombre de problèmes spécifiques comme « le jeu de la boîte », « le nombre pensé », « le jeu de l'autobus » constituent des habillages auxquels il convient de familiariser les élèves pour les amener à faire des liens et à être attentif à l'inconnue du problème. La gestion de la passation de la consigne comporte deux temps. Dans un premier temps, les élèves écoutent l'énoncé lu deux fois par le professeur, ils peuvent éventuellement prendre des notes mais ne doivent pas effectuer de calculs. Dans un second temps, ils résolvent le problème mentalement et écrivent le résultat.

Quatrième forme (durée et fréquence variables) : les élèves travaillent par groupes de niveaux de manière plus ou moins autonome à partir de différents supports, comme des jeux (jeux de cartes, de loto, labyrinthes, carrés magiques, etc.) ou des ressources numériques. C'est l'occasion pour le professeur de travailler plus particulièrement avec les élèves en difficulté en calcul mental et de leur proposer des activités spécifiques, adaptées à leurs difficultés, de revenir sur des prérequis, de combler des manques, etc.

Cinquième forme (travail individualisé par exemple dans le cadre de l'Aide Personnalisée) : pour les élèves qui ne réussissent pas là où la plupart de leurs camarades réussissent, il peut être pertinent de profiter de ces moments pour avoir avec eux un entretien qui leur permette d'expliciter leurs procédures et par là de mesurer la richesse ou le défaut de richesse de leur répertoire de résultats

19. Par exemple, l'énoncé : « Quel est le prix de 48 objets à 250€ ? » pourra aider à donner du sens à la procédure qui s'appuie sur une décomposition additive de 48 ; alors que l'énoncé : « Quel est le prix de 250 objets à 48€ ? » pourra, lui, favoriser les décompositions de 250.

Retour au sommaire

et de leur répertoire de techniques ou de méthodes ou encore leur familiarité avec les nombres. Cette activité a aussi pour but de rassurer les élèves, de les aider à identifier les connaissances acquises, de conforter et d'enrichir ces dernières et d'amener les élèves à utiliser à bon escient ce qu'ils savent.

Nos recherches sur le calcul mental ont mis en évidence l'importance de l'institutionnalisation et nos travaux sur l'analyse des pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP ont montré la complexité du processus d'institutionnalisation et les difficultés de gestion rencontrées par les professeurs observés. Le domaine du calcul mental est particulièrement « représentatif » de ces dernières. Le fait que le travail sur le calcul mental soit souvent oral, que « la main » soit laissée aux élèves, lié au fait de la nécessaire prise d'initiative et de la capacité d'adaptation à préserver et à faire acquérir côté élève, peut expliquer la minoration des temps d'institutionnalisation que nous avons souvent constatée.
Il est en effet difficile pour le professeur de décider quand, comment et quels savoirs institutionnaliser, quelles procédures privilégier, en prenant appui sur celles proposées par les élèves.
S'il ne faut pas imposer une technique unique de calcul aux élèves et s'il est indispensable de leur permettre de mobiliser des procédures individuelles correspondant à l'état de leurs connaissances, cela ne signifie pas pour autant que toutes les procédures de calcul se valent et qu'il ne faut pas les hiérarchiser ou les compléter. Ce travail de comparaison, initialisé dans les séances du deuxième type décrites ci-dessus et routinisé dans les autres types de séances nous semble incontournable. Les procédures doivent être comparées et hiérarchisées en prenant en compte leur efficacité et leur coût. L'institutionnalisation des procédures expertes ou efficaces doit être suffisamment souple pour laisser les élèves mobiliser d'autres procédures mais suffisamment explicite pour leur permettre d'appréhender les hiérarchies. Elles ne doivent pas être trop précoces afin d'être justifiées par l'expérience collective et individuelle acquise lors des calculs. Inversement, elles ne doivent pas être trop tardives afin de permettre la nécessaire évolution des techniques pratiquées. Dans tous les cas, il s'agit à la fois d'institutionnaliser une technique de calcul et son domaine d'efficacité.

Comment étendre les opérations et en enrichir la maîtrise ou les revisiter en fonction des domaines numériques ?

Nous renvoyons le lecteur à l'article traitant spécifiquement de l'apprentissage des nombres décimaux. Signalons seulement ici quelques pistes de travail.
En calcul mental, il s'agit d'amener les élèves à prendre conscience que leur répertoire de faits numériques pourra, moyennant certaines adaptations, encore être mobilisé dans ce nouveau cadre.

Par exemple, pour réinvestir la connaissance des compléments à 10 :

- les compléments à 1 :
  0,2 pour aller à 1 ? 1 – 0,82 ? 0,75 + ? = 1
- les compléments à l'unité :
  9,8 pour aller à 10 ? 20 – 19,2 ? 39,65 + ? = 40

Ou pour établir les liens entre certaines écritures fractionnaires :

- entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{10}$
- entre $\frac{1}{20}$ et $\frac{5}{100}$

Retour au sommaire

• entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{25}{100}$…

De nouvelles procédures relatives à la multiplication ou la division par 10, 100, 1 000 avec des nombres décimaux seront à automatiser :

• 37,25 × 10   67,5 × 100   50 ÷ 100   10,5 ÷ 10

De même le calcul posé d'addition ou de soustraction de nombres décimaux sera l'occasion à la fois de revenir sur la technique portant sur les entiers mais aussi de travailler les gestes nécessaires à l'extension de cette technique aux nombres décimaux comme par exemple l'« alignement » des chiffres dans l'addition ou la soustraction posée, le statut des retenues en lien avec la construction du sens des nombres décimaux (dix dixièmes, c'est une unité ; quatorze-dixièmes, c'est une unité et quatre dixièmes…).

• 21,08 + 9,135 + 104,7
• 205,6 – 4,125

Ces nouvelles conditions d'application des techniques opératoires permettent de les conforter et d'en percevoir l'ingéniosité.

Contextualisation/décontextualisation et réinvestissement

Cette question est liée aux précédentes notamment à celle de l'institutionnalisation et à celle des liens entre techniques et sens. C'est sans doute l'une des plus difficiles pour le professeur comme pour le chercheur. Nous avons apporté certains éléments de réponses à propos du calcul mental quand nous avons abordé la question des prérequis, de leur importance et quand nous avons traité des effets d'une pratique de calcul mental sur les performances des élèves en résolution de problèmes (standards ou non). Nous avons aussi souligné l'importance de ménager des moments d'institutionnalisation, de préciser le domaine de validité et d'efficacité des différentes techniques de calcul.
Il nous importe à ce stade de préciser notre point de vue à ce sujet. Toutes nos recherches concourent à confirmer le résultat suivant : il est nécessaire de ménager, pour les élèves en difficulté notamment, des cheminements cognitifs spécifiques leur permettant de surmonter leurs difficultés. Ces cheminements cognitifs particuliers demandent la mise en place de situations adaptées.
Présentons deux exemples de situations répondant à cet objectif. La première a été décrite par Perrin-Glorian (1997), sous l'intitulé « Situations de rappels ». Il s'agit notamment de ménager des moments où le professeur revient avec les élèves sur les connaissances fréquentées en classe, où il les met en relation, où il précise (ou fait préciser) leur degré de généralité, les domaines où elles peuvent être réinvesties, amorçant ainsi un processus de décontextualisation, de généralisation mais aussi de recontextualisation. Pour être efficaces, ces moments doivent s'appuyer sur des exemples issus de la pratique individuelle des élèves mais ils doivent être repensés dans le cadre d'une pratique mathématique collective de la classe. Ils doivent, quand cela est possible, faire l'objet de débats dans la classe.
De même, nos recherches ont montré que des bilans collectifs, mais aussi individuels, de savoirs sont particulièrement productifs pour les élèves en difficulté. Ces bilans peuvent prendre la forme de témoignages oraux individuels partagés dans un moment collectif par l'ensemble de la classe autour de questions du type : « Qu'est-ce que je sais, qu'est-ce que j'ai appris, qu'est-ce qui peut être utile par la suite, qu'est-ce que je dois retenir et comment je peux le retenir ? » Précisons que ces questions ne doivent pas être générales, détachées du contexte des apprentissages

Retour au sommaire

en cours mais toujours contextualisées, exemplifiées. Il ne s'agit pas de développer un discours métacognitif général mais plutôt d'expliciter au quotidien les méthodes rencontrées pour mieux s'en imprégner et réaliser leur importance et leur portée.
Nous avons montré (Butlen, Pézard, 2003) que des séances périodiques de bilans de savoirs basées sur des débats débouchant sur la production d'un écrit collectif résumant ce qui a été appris et ce qu'il est important de retenir en mathématiques avaient pour effet de favoriser chez les élèves la capitalisation des notions fréquentées, leur décontextualisation et permettaient l'existence de cheminements cognitifs profitables pour les élèves en difficulté. Il en est ainsi de la production de textes intermédiaires (énoncé de règles ou de propriétés mathématiques générales exemplifiées par un exemple générique) entre le contextualisé et le général ou de la production d'outils heuristiques. Par exemple, les élèves ayant à la fois une pratique de calcul mental et de bilans de savoirs prennent mieux conscience du statut des données dans un problème. Des déclarations écrites (individuelles et/ou collectives) du type : « Quand je ne sais pas trouver l'opération à effectuer et que les nombres sont compliqués, je les simplifie et comme çà je peux la trouver » montrent bien un changement de statut des données d'un problème. Celles-ci peuvent changer dans l'énoncé sans pour autant changer la relation qui les lie.

Conclusion

Les différents arguments développés dans ce texte contribuent à montrer comment le calcul (dans toutes ses modalités) est un outil pour les mathématiques, comment il participe de la construction des concepts abordés au cycle 3, comment connaissances numériques et maîtrise de techniques de calcul se construisent en étroite relation. Ces liens prennent des formes diverses selon les domaines numériques fréquentés, selon la modalité de calcul privilégiée et selon les opérations en jeu.

Bibliographie

- **ARTIGUE M.,** *L'Enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives*, Repères IREM, n° 54, 2004, p. 23-39.
- **BUTLEN D., PÉZARD M.,** « Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM2 », *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 12.2.3, Grenoble, La pensée sauvage, 1992, p. 319-368.
- **BUTLEN D., PÉZARD M.,** « Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation », *Recherche en Didactique des mathématiques*, vol. 23.1, Grenoble, La pensée sauvage, 2003, p. 41-78.
- **BUTLEN D.,** *Le Calcul mental, entre sens et technique. Des difficultés des élèves aux élèves en difficulté*, préface de Vergnaud G., Postface de M. Artigue, Presses universitaires de Franche-Comté, Besançon, 2007.
- **GUIN, D. & TROUCHE, L.,** *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, Grenoble, La pensée sauvage, 2002.
- **KAHANE J.P.,** *L'enseignement des sciences mathématiques*, Paris, Odile Jacob, 2002.
- **MARIOTTI M.A., MARACCI M,** « Un artefact comme outils de médiation sémiotique : une ressource pour l'enseignant », in G. Gueudet, L. Trouche. *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, Rennes, Presses universitaires de Rennes et INRP, 2010, p. 91-107.
- **PERRIN-GLORIAN M-J.,** *Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ?* Repères IREM, n° 54, 1997, p. 43-66.

Retour au sommaire

Partie 4

Résolution de problèmes

Jacques Douaire et Fabien Emprin

Présentation : la question des problèmes

Les programmes de 2008 indiquent, dès le premier paragraphe que : « La pratique des mathématiques développe le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision. »
La résolution de problèmes, qui mobilise toutes ces attitudes et ces compétences, est en effet au cœur de l'activité mathématique. Et, à l'école primaire, les problèmes sont partout, comme objectif d'apprentissage mais aussi comme moyen d'accéder à de nouvelles connaissances.
Or, de fréquents constats, lors des évaluations nationales ou internationales, font apparaître que la résolution de problèmes est difficile pour les élèves, et que ses buts n'apparaissent pas toujours suffisamment clairs aux enseignants. La gestion de cette activité, sa mise en route, le choix de modalités de recherche, les interventions pour réguler l'activité posent souvent des difficultés aux enseignants du premier degré.
Ce texte vise à apporter un éclairage sur l'activité de l'élève, sur les différents types de problèmes et ainsi à proposer des repères pour les choix de l'enseignant.

Fonctions des problèmes dans l'enseignement des mathématiques

Dans le domaine de l'enseignement, comme cela est indiqué dans les programmes 2008 : « Du CE2 au CM2, dans les quatre domaines du programme, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à résoudre des problèmes. »
Nous distinguerons, pour l'analyse, plusieurs fonctions des problèmes : d'une part l'apprentissage par résolution de problème, en confrontant l'élève à des situations qui lui permettront en franchissant un obstacle ou en réinvestissant des connaissances dans des contextes variés d'acquérir une compétence visée ; d'autre part l'apprentissage de la résolution de problème.

Analyse de la tâche de l'élève : deux cas différents

Nous distinguons deux types de tâches auxquelles l'élève peut être confronté dans le contexte des apprentissages scolaires, suivant qu'il dispose d'un modèle de résolution ou non[1] :
– si le problème relève d'une catégorie de problèmes que l'élève a appris à résoudre, par exemple des problèmes de « recette-dépense » au CM2, l'élève doit successivement identifier les étapes de la résolution, puis exécuter les calculs ;

1. Richard, *Les Activités mentales*, 1991 (voir bibliographie, p. 65).

Retour au sommaire

– si l'élève, contrairement au cas précédent, ne dispose pas d'un modèle mathématique qui lui aurait été enseigné auparavant, il doit alors élaborer une procédure de résolution, pouvant comporter des essais, s'appuyer sur des hypothèses… ; il doit lui-même évaluer cette procédure au fur et à mesure de sa recherche en confrontant ses résultats au but à atteindre, puis améliorer ou changer le cas échéant sa procédure de résolution ; ces deux phases sont concomitantes.
Or, les activités proposées dans des manuels sous cette appellation « problèmes » sont très diverses. Ici sont appelés problèmes, de simples exercices présentés avec l'habillage d'un court énoncé visant, en fin de chapitre, l'application d'une technique venant d'être enseignée, ailleurs ce sont des situations de recherche mobilisant plusieurs savoirs ou méthodes. Un des enjeux de l'apprentissage est de permettre à l'élève d'interpréter le problème comme étant un de ceux qu'il est censé savoir résoudre ou bien comme étant une situation de recherche. Dans le premier cas, l'enseignant attend que l'élève mette en œuvre un savoir qu'il doit avoir acquis ; dans le second cas, il doit faire des essais, utiliser un brouillon, choisir une méthode qui ne soit pas l'application directe des dernières notions apprises.

Différents types de problèmes

Deux critères peuvent nous permettre de distinguer différents types de problèmes ; d'une part celui que l'on vient d'évoquer (l'existence ou non d'un modèle de résolution qui serait identifiable par l'élève), d'autre part la finalité principale du problème proposé (acquérir des connaissances ou apprendre à résoudre des problèmes).

Différents types de problèmes

Les problèmes dont le modèle de résolution est disponible pour les élèves :
– les problèmes relevant d'une application directe du sens des opérations (devant absolument être maîtrisés par tous les élèves en fin du CM). Ils visent l'approfondissement, la maîtrise ou le contrôle de notions déjà abordées ;
– les problèmes plus complexes dont la résolution combine des étapes de raisonnement relevant de la catégorie précédente. Le réinvestissement des connaissances, l'organisation des calculs, l'apprentissage progressif de la rédaction de la solution constituent alors les finalités principales de ces activités. Au sein de cette catégorie, il est possible de distinguer :

- ceux qui ont pour objectif le réinvestissement conjoint de notions dans des contextes enrichissant les significations abordées antérieurement ;
- ceux permettant à l'élève de planifier progressivement sa solution comme c'est le cas notamment des énoncés dépourvus, au moins partiellement, de questions intermédiaires.

> Exemple n° 1 : Le directeur de l'école dispose d'un budget de 1 200 € pour acheter des cahiers. Il veut commander 80 cahiers de textes à 3 € l'un, 150 grands cahiers à 2 € l'un et 8 lots de 20 petits cahiers à 15 € le lot. Il faudra aussi des couvertures pour les cahiers. La couverture de chaque cahier coûte 1 €. Le directeur pourra-t-il acheter tout ce qu'il a prévu sans dépasser le budget dont il dispose ?

Dans ce problème, les difficultés ne résident pas dans la compréhension du contexte, ni dans celui des calculs mathématiques à mobiliser, mais dans l'abondance des données (plusieurs types de livres et de prix, diversité des conditionnements), et surtout dans l'absence de questions portant sur les étapes intermé-

Retour au sommaire

diaires de calculs, étapes que l'élève doit donc lui-même identifier préalablement ou au moins au cours de sa résolution.

Les problèmes inédits dont la résolution demande des prises d'initiatives d'un autre ordre.
Ils peuvent avoir des objectifs relevant plutôt de l'une ou l'autre des deux types de finalités dans les apprentissages, évoquées précédemment :
- des situations visant la découverte de notions nouvelles, permettant dans certains cas aux élèves de prendre conscience des propriétés de ces nouvelles connaissances (voir par exemple les chapitres « fractions » ou « proportionnalité »). Dans ce cas un modèle de résolution sera appris au cours de la scolarité ;
- des situations non-standards visant principalement à permettre aux élèves de prendre des initiatives, de formuler des hypothèses, et d'apprendre à les prouver, (par exemple des problèmes ouverts) dont les objectifs doivent être explicites et évaluables.

> Exemple n° 2 : Peut-on trouver trois nombres qui se suivent dont la somme est 78 ? Peut-on trouver trois nombres qui se suivent dont la somme est 25 ?

Quelles fonctions pour un énoncé donné ?

Selon la place qu'il prend dans une progression, un même problème peut avoir des fonctions différentes.

> Exemple n° 3 : (voir chapitre sur la proportionnalité de cette publication)
> Dans un magasin A, on vend des stylos, 4 pour 2 euros. Dans un magasin B, on vend les mêmes stylos 2,50 euros les 6. Dans quel magasin trouve-t-on les stylos les moins chers ?

Ce problème peut permettre d'identifier les procédures ou les difficultés initiales des élèves avant une reprise de l'étude de la proportionnalité au CM2 mais aussi être utilisé comme situation de réinvestissement en fin d'enseignement de la proportionnalité.

D'une façon plus générale, les questions suivantes peuvent éclairer l'usage d'un énoncé :
– pourquoi poser ce problème à ce moment-là ?
  - pour permettre aux élèves d'approcher une nouvelle notion. (ex : bandes de papier, ci-dessous)

> Exemple n° 4 : (voir chapitre sur la proportionnalité de cette publication) : 3 bandes de papier bleu superposables mises bout à bout ont la même longueur que 2 bandes de papier rouge superposables mises bout à bout. Combien de bandes rouges vont être nécessaires pour réaliser la même longueur que 6 bandes bleues ? 15 bandes bleues ? 42 bandes bleues ? Combien de bandes bleues vont être nécessaires pour réaliser la même longueur que 12 bandes rouges ?

  - pour permettre aux élèves de mobiliser leurs connaissances, de construire une stratégie, d'apprendre à chercher ;

– les élèves disposent-ils d'un modèle (d'une méthode, d'une façon de faire, d'une procédure connue) pour résoudre ce problème ?
  - oui, il s'agit d'une procédure dont l'automatisation est visée ;

Retour au sommaire

• oui, il s'agit d'une combinaison simple de telles procédures ; on a rencontré souvent cette situation ;
• non, pour les élèves ce problème est totalement inédit et l'objectif n'est pas d'automatiser la résolution de tels problèmes.

Résolution de problèmes et apprentissage

Apprendre par la résolution de problèmes

Si la résolution de problèmes, du grec πρόβλημα (próblema) dont la définition correspond à celle d'obstacle, permet la découverte des notions nouvelles, elle favorise aussi l'enrichissement de leurs significations dans des contextes différents de ceux qui ont permis leur introduction. Ainsi que nous l'avons vu, la contribution des problèmes aux apprentissages mathématiques est essentielle. Selon leur place dans la progression et leur nature, leur résolution permet successivement aux élèves :
– de percevoir l'intérêt du recours à des connaissances nouvelles pour résoudre des situations qu'ils ne pouvaient pas traiter auparavant, ou alors d'une façon incertaine ou laborieuse[2] ;
– d'enrichir les contextes dans lesquels ces connaissances sont utiles ;
– de maîtriser leur emploi et d'améliorer leur efficacité ;
– de contrôler leur mise en œuvre de savoirs : le travail sur la résolution de problèmes fournit aussi aux enseignants l'occasion d'apprécier le niveau d'acquisition des connaissances de leurs élèves.
Les problèmes ont donc aussi pour but de permettre le réinvestissement conjoint de plusieurs savoirs acquis dans des champs parfois différents ; ce sont par exemple des situations liées à la vie de la classe (établissement d'un budget, préparation d'une sortie scolaire…) où les données peuvent être sélectionnées à partir de différents supports (tableaux, graphiques…) relevant de la vie courante, mais aussi des problèmes de synthèse nécessitant le transfert dans des situations plus complexes de chacun de ces savoirs. Ces problèmes sollicitent des connaissances auxquelles l'élève est capable de faire appel, alors que rien n'indique qu'il faut les mettre en œuvre, même de façon implicite.
Le fait de mettre en œuvre une technique, un concept dans différents types de situations permet également à l'élève de décontextualiser la connaissance, de rendre son recours plus indépendant des situations initiales au cours desquelles il l'a rencontrée. Le fait de « rendre utile » une connaissance contribue à lui donner du sens. C'est parce que j'utilise souvent les tables, pour réaliser la technique opératoire de la multiplication sur des grands nombres, pour jouer au *Yam's*, ou dans les situations quotidiennes de calcul mental que j'apprends les tables et que cet apprentissage prend sens.
Il est aussi utile de montrer aux élèves que les connaissances acquises à l'école permettent de résoudre des problèmes de la vie courante. Pour cela, il est aussi important que ponctuellement les élèves soient confrontés à des problèmes correspondants à un projet qu'ils vont vivre et qui ne soit pas simplement évoqué de façon fictive. Il s'agit de rendre les élèves maîtres d'œuvre d'une tâche dont l'enseignant a défini un cahier des charges, c'est-à-dire les buts à atteindre et les contraintes à respecter. Les élèves sont alors plus ou moins libres des moyens qu'ils mettent en œuvre. Par exemple, la réalisation d'un tournoi interclasses sur une matinée

2. Des exemples de problèmes, pour ces différentes fonctions sont proposés dans différents chapitres de cette publication.

amène les élèves à mobiliser des outils mathématiques tels que les calculs sur les durées pour fixer le temps alloué à chaque match, la recherche d'exhaustivité pour que chaque joueur rencontre une fois et une seule les autres joueurs de sa poule… Une difficulté de ce travail est, pour l'enseignant, de prévoir, ou au moins de mettre en perspective, une fois le projet réalisé, les compétences investies.

Les mathématiques, qui, comme on vient de le voir, sont utiles dans la vie courante ainsi que dans les autres disciplines forment également au raisonnement et particulièrement à l'abstraction. Ce plaisir de chercher, peut être plus facilement développé quand on sort du cadre de la situation mathématique usuelle. Lancer des défis au sein de la classe et y répondre seul (en utilisant les pages « défis » de certains manuels ou le fichier *Évariste* de l'APMEP[3]) ou à plusieurs (en participant à des rallyes mathématiques, des concours[4]), échanger avec d'autres classes, avec un chercheur (comme par exemple dans l'initiative *Maths en Jeans*[5]).

Apprendre à résoudre des problèmes

Pourquoi un apprentissage spécifique ?

Si pour un mathématicien, la résolution de problème a pour but la production de nouveaux savoirs, par des méthodes de recherche éventuellement nouvelles, dans le cadre de l'école primaire, il est souvent difficile de viser à la fois un apprentissage d'une notion ou d'une technique et le développement de méthodes de recherche. La question se pose en termes d'apprentissage et en termes d'enseignement.

En termes d'apprentissage, comment aider des élèves qui, face à un énoncé, cherchent la bonne opération à utiliser ou s'adressent systématiquement au maître pour savoir « si c'est bon » ? Comment leur donner le goût de la recherche ? Comment leur permettre de prendre confiance dans leurs propres capacités d'initiative et de résolution ? Comment leur apprendre à utiliser leurs brouillons pour identifier leurs solutions ? Cette liste de questions n'est pas exhaustive et les réponses que peuvent trouver les enseignants dans des manuels se réduisent quelquefois au traitement de telle ou telle difficulté (prise d'information dans l'énoncé, représentation des données…).

En termes de choix d'enseignement dans la conduite de la séance, dans le cas d'un problème visant l'apprentissage d'une notion, l'enseignant doit prendre des décisions en fonction du savoir en cours d'acquisition : faut-il revenir sur une connaissance antérieure qui apparaît moins bien maîtrisée par certains élèves ? Faut-il valoriser une procédure experte sous réserve que l'élève puisse se l'approprier même si sa propre solution en reste éloignée ? Faut-il privilégier des activités d'entraînement ? Ces choix, directement liés à l'acquisition des connaissances en jeu, peuvent ne pas être toujours compatibles avec une évolution de méthodes de recherche qui suppose parfois de laisser à l'élève une plus grande autonomie.

Contrairement à d'autres thèmes abordés dans cette publication, l'absence d'un cadre scientifique général sur l'apprentissage de la résolution de problèmes nous conduit à formuler des propositions s'appuyant sur des expérimentations ou des travaux de recherche plus empiriques. Aussi, s'il est utile de proposer des situa-

3. Fichier *Évariste École*, brochure APMEP n° 175, extraits d'une quinzaine de compétitions (rallyes, tournois, Kangourou…).
4. Voir l'association Animaths http://www.animath.fr/ et le réseau des IREM http://www.univ-irem.fr
5. MATh.en.JEANS, association loi 1901 agréée par l'Éducation nationale et soutenue par le CNRS. Le comité de parrainage comprend l'APMEP, la SMF, le Palais de la découverte http://mathen-jeans.free.fr/

Retour au sommaire

tions spécifiques pour apprendre à chercher, il est nécessaire que des objectifs précis les justifient. Il s'agit de situations où certaines de ces compétences seront particulièrement mises en évidence. Mais, bien entendu, ces compétences sont sollicitées, à des degrés divers dans d'autres problèmes, suivant la fonction ou la complexité du problème proposé. Même dans un problème simple, il est utile que l'élève confronte sa solution aux données de l'énoncé…

Comprendre un énoncé

Fondamentalement, comprendre un problème consiste à formuler des hypothèses concernant les relations possibles entre les informations présentes dans la situation évoquée et à les confirmer ou les infirmer grâce aux informations contenues dans le texte au fur et à mesure de sa lecture.
Au début du cycle 3, les élèves ont donc déjà été confrontés à des énoncés de problèmes. Ils ont pu appréhender que la forme d'un énoncé de problème arithmétique comporte des données, au moins une question qui peut être résolue par un calcul en utilisant ces données et où la réponse ne doit pas être dans l'énoncé. Différentes activités portant sur les énoncés de problème ont été proposées aux élèves depuis le cycle 2 où ils ont pu en identifier les composantes (données, questions) ; ils ont aussi été conduits à trier le cas échéant les données pertinentes et celles qui n'apportaient pas d'information pour la résolution du problème, voire à chercher des informations complémentaires sur d'autres supports qu'un texte écrit.
Mais l'apprentissage de la résolution de problème ne peut se réduire à un travail sur la forme des énoncés. De plus il est difficile pour les élèves de rejeter un énoncé qui ne respecte pas certaines normes (données nécessaires et suffisantes, possibilité d'inférer la réponse à partir des calculs) et en respecte d'autres (une histoire courte présentée par un adulte, présence de nombres écrits en chiffres, présence de questions…). Par exemple le travail sur ce qu'on appelle « mots inducteurs » présente des limites ; il revient à faire apprendre aux élèves que lorsqu'ils trouvent les mots « fois », « chacun »… dans un énoncé alors l'opération à utiliser sera une multiplication, ce qui peut apporter une aide superficielle mais qui ne fonctionne que dans un nombre limité de cas. Ces mots inducteurs permettent aux élèves de trouver la réponse au problème : « Cinq enfants ont trois billes chacun, combien ont-ils de billes en tout ? », mais les conduiront à l'échec dans le problème : « J'ai 15 billes ; je donne à chacun de mes enfants 3 billes et il ne m'en reste plus, combien ai-je d'enfants ? »
La compréhension de la structure d'un énoncé de problème s'approfondit au cycle 3, au moyen d'énoncés où toutes les questions intermédiaires ne sont pas explicitées et où les données ne sont pas présentées dans le même ordre que ces questions. Ceci est en particulier nécessaire pour la résolution de problèmes de synthèse ou de situations que l'élève rencontrera dans d'autres contextes que l'école, évoqués précédemment.

Planifier et rédiger des solutions (le rôle de l'écrit)

Planifier une solution

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux problèmes complexes sollicitant des connaissances déjà enseignées (voir précédemment les différents types de problèmes).

Retour au sommaire

L'élève doit identifier les étapes des calculs nécessaires à la résolution de la question principale. Au CM1, contrairement au CM2, les élèves ne peuvent pas toujours expliciter ces étapes sous la forme de questions intermédiaires identifiées préalablement mais simplement produire, par des calculs, des résultats successifs les conduisant progressivement à la solution. Par exemple, dans la situation des fournitures (exemple n° 1), pour chercher le coût total de fournitures pour une école, comportant de nombreuses données, les élèves de CM1 ne peuvent pas, en général, planifier les étapes de leur résolution avant de commencer à chercher.

Apprendre à rédiger une solution

Au cours moyen, les élèves vont avoir à rédiger leur solution. Au début du cycle 3, la rédaction de la solution peut suivre la mise en commun : les élèves peuvent alors s'appuyer sur une des solutions exposées. Puis au cours du CM2, de façon plus individuelle, ils seront incités à rédiger directement à partir de leur propre résolution du problème. Ces écrits doivent présenter les principales étapes de la solution, et permettre sa compréhension sans l'appui d'une formulation orale. Cela suppose un travail d'analyse de ces rédactions en vue de leur amélioration, sans viser une formulation stéréotypée.
La planification des étapes des calculs, puis leur formulation en questions intermédiaires préparent leur mise en forme écrite ultérieure ; d'autre part, celle-ci rend nécessaire l'identification *a posteriori* des étapes de la solution, et met en évidence l'intérêt de leur planification. Dans l'exemple n° 1 cité précédemment, la rédaction de la solution est facilitée par la prise de conscience par les élèves des étapes des calculs et des différentes méthodes qui ont été utilisées (par exemple calculer pour chaque type de livres leur prix avec celui des couvertures qui les concernent ou calculer le prix de l'ensemble des livres puis celui des couvertures…).
Les tableaux présentés dans les programmes de 2008 et qui donnent des repères pour l'organisation de la progressivité des apprentissages par les équipes pédagogiques indiquent pour le CE2 : « Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations », pour le CM1 : « Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes » et pour le CM2 : « Résoudre des problèmes de plus en plus complexes ». Aussi cet apprentissage peut s'appuyer pour ces deux dernières années du cycle sur :

- au CM1 une séquence comportant :
  - une situation du type de l'exemple 1 ;
  - une rédaction personnalisée par chaque élève ou groupe d'élèves ayant des solutions voisines après que chacun aura bien annoté ses calculs et explicité sa méthode ;
  - une analyse en classe des rédactions des solutions ;
  - une reprise immédiate avec un problème voisin pour permettre un réinvestissement ;
  - une reprise éventuelle avec un nouveau problème quelques mois plus tard ;
- de même au CM2, le même dispositif peut être repris avec, cette fois une rédaction autonome par chaque élève de sa solution avant la mise en commun.

Élaborer et contrôler des solutions

La résolution des problèmes « non-standards », par exemple des problèmes ouverts (problèmes de partages inéquitables, problèmes à deux contraintes, problème de recherche de toutes les solutions…), problèmes de rallyes mathématiques et

problèmes correspondants proposés dans les ouvrages Ermel (INRP) a pour but d'inciter les élèves à :
– prendre des initiatives (faire des essais, émettre des hypothèses) ;
– contrôler par eux-mêmes leurs productions, les comparer aux données et contraintes de l'énoncé, par exemple s'organiser pour produire toutes les solutions ;
– voire produire des preuves en s'appuyant sur des connaissances et des raisonnements.
Plusieurs caractéristiques sont communes à ces situations :
– l'énoncé est court et ne demande pas un travail d'interprétation ou de sélection de données ; cet énoncé peut être décontextualisé ;
– les élèves disposent de connaissances qui leur permettent d'élaborer progressivement une procédure de résolution.
S'il est nécessaire de proposer quelques situations de ce type chaque année, il faut que l'enseignant sache clairement dans quelle perspective il fait travailler les élèves. Une des difficultés relatives à la résolution de problèmes, concerne le flou relatif aux objectifs que peuvent percevoir certains enseignants[6]. Il est essentiel que la finalité de telle ou telle situation réside dans le développement d'une ou plusieurs des compétences déjà citées : produire des essais, émettre des hypothèses, confronter les résultats au but à atteindre, justifier ou critiquer des propositions selon des critères mathématiques…
Ces problèmes sollicitent les compétences numériques, et sont aussi l'occasion pour faire progresser les élèves dans ce domaine.

Exemple n° 5 : Dans un problème où il s'agit de chercher toutes les façons d'atteindre 97 en ajoutant des 8 et des 3, la présentation de premiers résultats sous une forme multiplicative (ex. : $11 \times 3 + 8 \times 8$) est réinvestie dans les recherches suivantes par de nombreux élèves qui essaient des couples de multiples plutôt que d'additionner des 3 et des 8 jusqu'à atteindre 97 et compter ensuite combien ils en ont utilisés.

En effet, pour que ce type d'activité soit fructueuse, il faut que l'enseignant permette aux élèves de comprendre ce qu'ils ont appris, d'où l'importance de la mise en commun et de la synthèse finale.

Appréhender des raisonnements mathématiques

Au cycle 3, les élèves sont capables de produire des raisonnements corrects et d'appréhender les règles de la rationalité mathématique. En particulier, ils sont capables :
– de comprendre qu'une proposition mathématique doit être prouvée, qu'il ne suffit pas d'affirmer qu'elle est vraie ou fausse ;
– d'utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition générale, même si, bien entendu il n'est pas question de faire du contre-exemple un objet d'étude ;
– de recourir à des savoirs pour produire oralement un raisonnement valide ;
– d'argumenter (justifier, interroger, critiquer) à propos de la validité de propositions ou de raisonnements énoncés par d'autres.
Pour développer ces compétences, des problèmes, pour lesquels ils ne disposent pas de la solution, peuvent être abordés dès le CM1. La production et la critique des justifications permettent le développement de ces compétences.

6. Voir le rapport de l'Inspection générale sur l'enseignement des mathématiques en 2006.

Retour au sommaire

Exemple n° 6 : Dans le problème « *trouver trois nombres qui se suivent dont la somme est 25* » (voir Ermel CM1) qui est proposé après que les élèves ont résolu ce même problème pour des valeurs qui admettent une solution, certains élèves vont affirmer, lorsque le maître leur demande de mettre par écrit chacun pourquoi il n'y a pas de solution, que « ce n'est pas possible parce que je n'ai pas trouvé », ou d'autres que « ce n'est pas possible parce que 25 est impair ». La prise de conscience qu'il faut apporter un argument à l'appui d'une solution ou produire un contre-exemple pour infirmer une proposition apportée par d'autres élèves contribue à un apprentissage de la preuve (15 est impair et est la somme de trois nombres qui se suivent 4, 5 et 6).

Pour ces apprentissages communs à ces situations (produire des stratégies de calcul s'appuyant sur des essais, émettre et tester des hypothèses, prouver des propositions…), il est nécessaire de proposer au moins quatre situations par an (deux au début de l'année pour que les élèves prennent confiance et deux au cours du second semestre pour les développer)[7].

Le rôle de l'oral

La communication orale intervient dans différentes phases de la situation. Après la lecture de l'énoncé par les élèves, il peut être nécessaire de préciser certains termes peu familiers ou ambigus. Les demandes d'explication ou les reformulations par un autre élève permettent au professeur de comprendre ce que l'élève a compris.
Mais elle intervient aussi pour la formulation et la critique de solutions. L'expression de solutions peut favoriser, chez l'élève qui les a produites, diverses prises de conscience : il peut s'apercevoir qu'il a oublié une des contraintes ou qu'il a produit des erreurs de calcul. Cela lui permet de mieux interpréter les différentes méthodes, d'en identifier les caractéristiques propres, voire de prendre conscience des imperfections ou des raisons pour lesquelles ils ont pu ne pas aboutir, d'établir un lien entre différents essais de calcul successifs, de repérer des calculs inutiles qu'ils ont pu réaliser.
L'objectif d'une communication à la classe amène ainsi progressivement les élèves à améliorer la trace écrite de leur travail de recherche.
Une autre fonction de l'oral en mathématiques est d'interroger pour pouvoir comprendre les méthodes exposées, pour élucider une démarche trop succinctement présentée ou pour faire repréciser des termes ; ces demandes pouvant provenir des élèves. Mais de façon complémentaire, l'élève en situation d'écoute est parfois obligé de reformuler, pour lui-même ou pour la classe, des méthodes produites et exposées par d'autres pour pouvoir en analyser les caractéristiques essentielles, et comprendre ce en quoi elles sont éventuellement plus pertinentes ou performantes que les siennes.
Le recours à l'oral permet également la critique : elle peut porter sur la pertinence de procédures relativement à la question posée, sur leur mise en œuvre (sont-elles économiques, rapides), et permettre de relever des erreurs dans leur déroulement.

7. Des propositions de progressions sont présentées notamment dans Ermel.

Mettre en œuvre des problèmes

Le contrat didactique

Ce que l'élève doit prendre en charge lors de la résolution de problèmes doit être clairement identifié par lui. Il doit produire, contrôler et formuler une solution, mais il peut choisir sa méthode, recourir à un brouillon, disposer du temps nécessaire pour chercher sans craindre une évaluation qui sanctionnerait les travaux les plus faibles, laborieux ou inachevés. Cet aspect du « contrat didactique » (la représentation que peut se faire l'élève de l'attente du maître) est différent pour les tâches de résolution de problèmes de celui mis en œuvre dans des activités d'entraînement, par exemple celles de calcul mental qui visent la mise en place ou le recours à des résultats mémorisés.
En particulier, cela suppose, lors des premiers problèmes proposés en début d'année que ces attentes soient explicitées et que ces comportements soient valorisés. Une difficulté provient de ce que les élèves sont aussi sensibles aux décisions de l'enseignant, quelquefois différentes de ses propos : envoyer au tableau en premier un élève qui a réussi, ou évaluer par une note les résultats d'un travail de recherche, pourra avoir un effet inhibiteur sur des élèves plus faibles.
Les situations de type problème-ouvert sont utiles en début d'année pour installer ces conditions de travail, notamment dans le cas où des élèves n'auraient pas eu l'occasion de résoudre de tels problèmes les années précédentes. Les prises d'initiatives sont possibles et les solutions ne sont pas regardées sous l'angle de ce que l'élève aurait dû apprendre.

La présentation du problème

L'appropriation du problème par l'élève peut présenter quelques variantes selon les situations, après un temps de lecture individuelle. Par exemple, après la présentation de la situation, il est nécessaire de s'assurer que tous les élèves ont bien identifié ce qui est cherché ; or la simple relecture ou reformulation ne garantit pas toujours la compréhension. Il est souvent nécessaire au bout de quelques minutes de repérer si certains élèves ne sont pas en train de résoudre un autre problème (confusion entre des situations, oubli d'une des données…) et de faire alors une mise au point qui explicite, à partir de ces tentatives erronées, les différences entre le problème posé et celui ou ceux que certains élèves ont compris. Il ne s'agit pas, bien entendu, de « mettre les élèves sur la voie », mais de mettre en évidence que le problème proposé est différent.

> Exemple n° 7 : Dans le problème : *trouver trois nombres qui se suivent dont la somme est 96*, il peut arriver que certains élèves comprennent que ce sont les chiffres d'un nombre qui se suivent (ex. : 23 et non les nombres). Dans ce cas il est inutile de les laisser chercher dans cette voie, mais plutôt revenir sur l'énoncé par une rapide mise au point collective.

La phase de recherche

Dans la phase de recherche, il est essentiel que l'élève soit responsable de sa recherche et que des tentatives de demander au maître « qu'est-ce que je dois faire ? » ou « est-ce que j'ai bon ? » ne peuvent entraîner de réponses informatives sur la solution sans prendre le risque de transformer la situation en un exercice d'application,

Retour au sommaire

qui serait alors bien coûteux en temps. Bien entendu, des aides différenciées (valeur des nombres, outils de calcul…) sont des ressources pour le maître.
Cette phase de recherche peut être individuelle et, le cas échéant, suivie d'une recherche par groupe, mais il est important que chaque élève ait la possibilité de produire lui-même et d'améliorer une solution.

La mise en commun

Dans la conduite des mises en commun, dont le but n'est pas seulement la formulation des résultats ou des méthodes, mais principalement leur validation par la classe selon des critères mathématiques, deux écueils se rencontrent parfois : réduire cette mise en commun à une correction, ce qui se produit par exemple si un bon élève explicite précocement sa solution sans garantir que d'autres élèves ont compris pourquoi leur méthode est erronée, ou présenter exhaustivement les solutions de chaque élève, ce qui rallonge la durée des échanges et ne met pas en évidence les points sur lesquels chacun peut progresser.
Dans ce but, il est souvent utile que le maître puisse identifier les principales catégories de productions et choisir un ordre de présentation de celles-ci qui soit compatible avec l'expression par les élèves ayant des productions partiellement inachevées ou plus laborieuses des améliorations qu'ils pourraient y apporter.
Par exemple après la résolution d'un problème complexe ou d'un problème inédit, il peut être intéressant de commencer par analyser :
– les productions qui ne vérifient pas les contraintes de l'énoncé ;
– les productions qui ont pris en compte ces contraintes, mais qui n'ont pas abouti, car l'élève à trop souvent changé de méthode, mal interprété un écart, produit une erreur de calcul… ;
– les productions correctes, mais avec des méthodes comportant de nombreux essais ;
– les productions présentant une méthode efficace.
Le but de la mise en commun pouvant être de faire accéder les élèves au moins à une méthode fiable, même si elle n'est pas encore la plus rapide ou économique, lui permettant de produire et de gérer des essais.
Dans cette phase, il est essentiel que les critiques soient formulées par les élèves eux-mêmes. Par ailleurs, il est important qu'un enjeu réel existe pour l'élève dans ces mises en commun : déterminer quel est le résultat correct, comparer des méthodes du point de vue de leur efficacité ou leur niveau de généralité, prouver si une proposition est vraie ou fausse… et qu'il perçoive qu'il y a un enjeu en termes de savoir, qu'il pourra par exemple être conduit à réinvestir sa procédure ou choisir celle d'un autre s'il la juge plus efficace. **Si la mise en commun porte sur les résultats,** il est essentiel que les élèves ne sachent pas à l'avance si leur production est correcte. **Si la mise en commun vise les méthodes,** l'élève doit être clairement sollicité dans la perspective de réutilisation de ces méthodes pour avoir un intérêt à en discuter l'efficacité ou le niveau de généralité.
Dans les faits, cette mise en commun doit permettre de valoriser des productions (résultats, méthodes, propositions…) que pourront s'approprier les élèves qui n'y avaient pas encore accédé.

La synthèse

Dans tous les cas, ce moment doit se conclure par une synthèse qui peut prendre la forme d'une trace écrite sans laquelle le réinvestissement lors d'une séance ultérieure est fortement compromis. Cette trace écrite peut comporter des résultats

Retour au sommaire

provisoires : « Nous avons réussi à résoudre tel problème… en faisant telle chose » que les élèves pourront tester dans d'autres situations ou des résultats mathématiques ou méthodologiques généralisables visés par l'enseignant. Dans ce cas, l'enseignant explicite aux élèves que ce qui est écrit est bien ce qu'il faut apprendre, les didacticiens parlent alors d'institutionnalisation.

Retour sur les prises de paroles du maître

Au cours des différentes phases, les prises de parole du maître peuvent être de différents types :
– « dis-moi (dis-nous) ce que tu as compris qu'il faut faire » ;
– « dis-moi (dis-nous) ce que tu penses qu'il faut faire pour résoudre ce problème » ;
– « dis-moi (dis-nous) ce que tu proposes de faire » ;
– des explications ;
– des interventions individuelles ou collectives, pour recentrer certains élèves sur la tâche, par exemple, pour gérer le groupe… ;
– des sollicitations pour inciter un élève qui s'exprime peu à le faire, par exemple pour demander à un élève de réexpliquer avec ses propres termes une proposition formulée par un autre ;
– des reformulations par l'enseignant lui-même de propos peu compréhensibles d'un élève sans en changer le contenu ;
– des interventions techniques qui ne portent pas de jugement sur les productions par exemple la correction d'erreurs de calculs ;
– des rappels de ce qui a été cherché, car les élèves peuvent perdre de vue l'ensemble du travail déjà mené ;
– des jugements, explicites ou exprimés par des actions (passer à une autre proposition…) sur les productions.
Les interventions de la dernière catégorie dénaturent la fonction des phases de recherche et plus encore des mises en commun, mais sont nécessaires dans les phases de synthèse.

Conclusion

La résolution de problèmes vise des enjeux d'apprentissages différents en fonction de la nature de la tâche proposée à l'élève. Ces apprentissages supposent non seulement de choisir des problèmes en adéquation avec les objectifs, mais aussi de proposer une progression sur les trois années du cycle.
Faire résoudre des problèmes aux élèves, participer à un rallye maths, faire un « problème-ouvert » ne suffit pas en soi, toutes ces activités si bien menées et si intéressantes soient-elles nécessitent que le maître se soit donné des objectifs pour ses élèves, qu'il ait anticipé les apprentissages possibles et souhaités, et que les élèves identifient les apprentissages qu'ils viennent d'effectuer.
Dans ce travail, le principal écueil serait de réduire l'activité mathématique de l'élève par exemple, en permettant à l'élève de croire que les mots « inducteurs » sont des indicateurs infaillibles de l'opération à effectuer (dans l'énoncé il y a le mot « chacun » donc c'est une division). Les élèves qui posent les questions : « Qu'est-ce que je dois faire ? » ou « Est-ce que j'ai bon ? » cherchent des indices dans les interventions de l'enseignant ce qui montre à celui-ci une mauvaise compréhension de l'activité mathématique, cela doit être un indicateur pour l'enseignant. Enfin parmi les écueils, la mise en commun ne doit pas se limiter à la formulation des résultats

Retour au sommaire

et des méthodes ; elle doit permettre de faire émerger les apprentissages conceptuels, techniques ou méthodologiques.
La résolution de problèmes concrets permet aux élèves d'appréhender les mathématiques comme une discipline qui est utile dans la vie quotidienne (vérifier un rendu de monnaie, comparer des achats par lots…) ; mais tous les apprentissages mathématiques de l'école primaire n'ont pas cette fonction : quel pourcentage de la population en effet effectue des divisions posées quotidiennement ou même mensuellement ? Les mathématiques « sont partout » jusque dans la clé de notre numéro de sécurité sociale[8], mais, dans ce cas, qui les utilise à part les personnes qui conçoivent les logiciels qui contrôlent qu'il n'y a pas d'erreur de frappe ? Les mathématiques sont une construction de la pensée et doivent aussi être appréhendées comme telles. Il faut donc faire cohabiter des problèmes qui permettent de montrer leur utilité ou de réinvestir des techniques en leur donnant du sens, des problèmes de la vie courante et des problèmes où les élèves prennent plaisir et développent « le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision ». Les problèmes qui relèvent d'une réflexion interne aux mathématiques comme « trouver trois nombres entiers qui se suivent dont la somme est 96 » (ou « pourquoi 25 n'est pas la somme de trois nombres entiers qui se suivent ? ») représentent bien cette dimension des mathématiques.

Bibliographie

- **ARSAC G., MANTE M.,** *Les Pratiques du problème ouvert*, CRDP Lyon, 2005.
- **ERMEL,** *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CE2, CM1, CM2*, INRP, Paris, Hatier, 2005.
- **FROMENTIN J., TOUSSAINT N.,** Fichier *Évariste École*, APMEP, 2006.
- **RICHARD J.-F.,** *Les Activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Paris, Armand Colin, 1991.

8. Les clés du numéro de Sécurité sociale est égale à 97 - le reste dans la division euclidienne du numéro de Sécurité sociale par 97 (plus grand nombre premier inférieur à 100).

Retour au sommaire

Partie 5

Proportionnalité au cycle 3

Arnaud Simard

La proportionnalité est un thème mathématique dont l'étude s'étend de l'école primaire aux classes post-baccalauréat. Cette notion en prise directe avec la vie courante est un incontournable de toutes les disciplines scientifiques, c'est pourquoi l'initiation aux raisonnements propres à la proportionnalité est particulièrement importante.

Cadre du Socle commun et lien cycle 2 – cycle 3

La proportionnalité est inscrite dans le pilier 3 du socle commun des connaissances et compétences : « La proportionnalité : propriété de linéarité, représentation graphique, tableau de proportionnalité, produit en croix ou règle de 3, pourcentage, échelle[1]. » L'étude de la notion de proportionnalité pour elle-même relève du collège mais débute à l'école élémentaire. Le terme de « proportionnalité » apparaît dans les programmes 2008 au cycle 3 sous l'item suivant : « Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la "règle de trois")[2] » mais la notion de proportionnalité est présente dans les situations mathématiques depuis la maternelle. En effet, les jeux d'échange sont déjà des problèmes relevant de la proportionnalité.

> Exemple : Une bille bleue vaut deux billes rouges. Si je te donne 3 billes bleues, combien me donnes-tu de billes rouges ?

Les multiplications (addition réitérée/produit de mesures) et les divisions (partition/quotition) sont également à appréhender, pour l'enseignant, comme des cas particuliers de problèmes relevant de la proportionnalité simple. « 3 fois 7 égale ? » peut par exemple être vu comme le problème de proportionnalité suivant : « Si 1 vaut 7, combien valent 3 ? ». Ces différents aspects de la multiplication et de la division sont clairement imagés dans *Le nombre au cycle 2*. Le concept de proportionnalité se construit sur la durée, les élèves doivent être confrontés à ce modèle le plus tôt possible (dès le CP) et de plus en plus régulièrement jusqu'au CM2.

Les cadres de la proportionnalité

Permettant de modéliser nombre de situations de la vie de tous les jours, la notion de proportionnalité est généralement abordée dans le cadre des grandeurs (nombres correspondant à des quantités ou des mesures. Les problèmes mathématiques sont alors habillés par des situations de la vie quotidienne (prix à payer pour une masse

1. *Le Socle commun des connaissances et des compétences* – décret n° 2006-830 du 11 juillet 2006.
2. *Bulletin Officiel* hors-série n° 3 du 19 juin 2008.

Retour au sommaire

d'une denrée connaissant le prix au kilo de celle-ci, ingrédients pour 6 personnes connaissant la recette pour 4 personnes, etc.). La notion de proportionnalité peut également être traitée dans le cadre numérique (nombres sans unité : ceci relève plus de l'étude de la proportionnalité faite au collège), dans le cadre graphique (lien avec la représentation graphique des fonctions linéaires) et dans le cadre géométrique (homothéties : agrandissement/réduction de figures).
Il semble naturel de **faire fréquenter** la notion de proportionnalité aux élèves par la résolution de problèmes **concrets** dans le but de donner du sens aux principales procédures qui feront l'objet d'un enseignement sur le long terme (liaison école-collège). Dans cet objectif, **technique** et **sens** doivent se nourrir l'un l'autre.

Le « modèle mathématique » sous-jacent de la proportionnalité

Modéliser, c'est trouver une façon de décrire le problème que l'on doit résoudre dans un cadre théorique pertinent. Mais souvent plusieurs cadres sont possibles. Et pour ce qui concerne la proportionnalité, l'étude des programmes de l'école élémentaire montre que l'on est passé d'un enseignement basé au début du XXe siècle sur la **théorie des proportions** à un enseignement basé sur la **linéarité**. Le paragraphe qui suit n'a pas vocation à être enseigné à l'école élémentaire mais tente de donner un éclairage rapide de la notion de proportionnalité d'un point de vue théorique.
Théorie des proportions. Dans ce cadre on étudie deux suites finies de nombres qui se correspondent un à un et l'accent est mis sur les **rapports égaux**. Dans leur cours de 1920, Philippe et Dauchy définissent la proportionnalité de la manière suivante : « Deux suites de nombres qui se correspondent un à un sont proportionnelles lorsque les rapports de deux nombres correspondants sont égaux ». Cette théorie n'a de sens que lorsque les rapports (lien entre écritures fractionnaires et quotient) ont été étudiés. La théorie des proportions débouche naturellement sur la technique du produit en croix (a ÷ b = c ÷ d implique ad = bc) dont la **règle de trois** est une expression contextualisée[3].

Exemple : Les suites (2 ; 5 ; 8,5) et (3 ; 7,5 ; 12,75) sont proportionnelles car : 2 ÷ 3 = 5 ÷ 7, 5 = 8,5 ÷ 12,75.

Dans une situation de proportionnalité décrite par cette théorie, le rapport commun entre les nombres qui se correspondent est appelé coefficient de proportionnalité.
Modèle linéaire. Une fonction[4] f est dite linéaire lorsqu'elle est du type : $f(x) = ax$, expression dans laquelle a désigne un nombre réel donné, lié à f, et ax le produit a multiplié par x.
Toute situation qui peut être modélisée par une fonction linéaire est une situation de proportionnalité. La représentation graphique est une droite ; le nombre a est directeur de cette droite. C'est le **coefficient de proportionnalité** de la situation. a est aussi égale à $f(1)$, c'est la **valeur de l'unité**.

3. Le produit en croix est une technique développée dans le cadre numérique (nombres sans unité) et la règle de trois est une technique développée dans le cadre des grandeurs (nombres avec unité), c'est-à-dire liée à un contexte. Le produit en croix implique la règle de trois car (a ÷ b = c ÷ d) ⇛ (ad = bc) ⇛ (a = bc ÷ d).
4. On parle ici d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Retour au sommaire

Exemple : Au marché, les carottes sont vendues 2,50 euros le kilo. Le prix à payer en fonction de la masse de carotte achetée est une situation de proportionnalité modélisée par la fonction f qui au nombre x de kilogrammes de carotte fait correspondre $2{,}5\,x$, prix à payer en euros. La fonction $f(x) = 2{,}5\,x$ est la fonction linéaire qui modélise la situation.

Les fonctions linéaires sont caractérisées par deux propriétés[5].
La propriété dite **additive**[6] $f(x + y) = f(x) + f(y)$
et la propriété dite **multiplicative**[7] : $f(k \times x) = k \times f(x)$.
Ces deux propriétés sont utilisées de façon implicite dans les procédures de résolution des problèmes de proportionnalité à l'école et au collège.

Exemple : En empilant 4 cubes identiques on obtient une tour de 22 cm de hauteur. Quelle est la hauteur d'une tour obtenue en empilant 12 cubes ? 40 cubes ?

Ce problème peut être proposé à des élèves de CE1/CE2 car il prend tout son sens lorsque la division décimale n'est pas encore maîtrisée. En effet, pour trouver la hauteur d'une tour de 12 cubes, il suffit d'empiler 4 cubes, puis 4 cubes puis encore 4 cubes, ce qui donne 22 + 22 + 22 = 66 cm. Cette procédure est une utilisation en acte de la propriété additive. De manière théorique (hors école élémentaire), si on désigne par f la fonction qui associe à un nombre x de cubes la hauteur $f(x)$ (en cm) de la tour composée des x cubes empilés alors $f(4) = 22$ cm. Et on a également

$$f(12) = f(4 + 4 + 4) = f(4) + f(4) + f(4) = 22\text{ cm} + 22\text{ cm} + 22\text{ cm} = 66\text{ cm}.$$

Pour 40 cubes, l'addition réitérée n'est plus pertinente. Mais on peut tout à fait attendre d'un élève de CE2 le raisonnement suivant « empiler 40 cubes c'est empiler 10 fois 4 cubes » ce qui débouche sur une hauteur de 10 × 22 cm = 220 cm. Cette procédure est une utilisation en acte de la propriété multiplicative. De manière théorique on a effectué le calcul

$$f(10 \times 4) = 10 \times f(4) = 10 \times 22\text{ cm} = 220\text{ cm}$$

Un intérêt évident de cet exercice consiste en la possibilité d'une vérification effective (l'élève anticipe le résultat par le calcul et vérifie par la manipulation). Bien entendu cet exemple peut être complété par d'autres questions (hauteur d'une tour de 2 cubes ? de 10 cubes ? de 121 cubes ?) qui donnent lieu à une multitude de procédures[8] pour obtenir les résultats. Ceci permet des discussions riches avec les élèves.

Lien entre les deux modèles

Dans la théorie des proportions on définit le coefficient de proportionnalité comme étant le rapport commun. Ce coefficient est aussi celui de la fonction linéaire sous-jacente à la situation de proportionnalité. Réciproquement la donnée d'une fonction linéaire permet la construction de deux suites proportionnelles (ces deux suites peuvent être vues comme les nombres d'un tableau de valeurs de la fonction linéaire). Les deux modèles sont équivalents, ils décrivent les mêmes situations[9].
Ces deux modèles théoriques ne sont pas enseignés pour eux-mêmes à l'école élémentaire (les rapports égaux n'ont de sens que lorsque la notion de rapport en tant que division en a un, 6e/5e, et les fonctions linéaires sont enseignées en classe de 3e).

5. On peut montrer que ces propriétés sont équivalentes.
6. La propriété additive se démontre par $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.
7. La propriété multiplicative est également appelée propriété d'homogénéité ou propriété scalaire. Elle se démontre par $f(k \times x) = a(kx) = k(ax) = k \times f(x)$.
8. Le nombre de procédures pour obtenir la hauteur d'une tour de 121 cubes coïncide avec le nombre de décompositions additives et multiplicatives de 121.
9. La théorie des proportions est adaptée au cadre discret (nombre fini de valeurs) et la linéarité est adaptée au cadre continu (nombre infini de valeurs).

Pour autant la plupart des techniques issues de ces deux théories sont adaptées à l'école élémentaire et ce, dès la classe de CP.
La théorie des proportions insiste sur le rapport de deux termes se correspondant. La valeur de ce rapport (le coefficient de proportionnalité) est également la **valeur de l'unité** (qui correspond à la **valeur d'une part** dans le cadre des divisions partitions.

Exemple : Si 3 roses coûtent 4,50 euros. Le rapport 4,50 ÷ 3 = 1,50 est la valeur de l'unité (c'est-à-dire le prix unitaire des roses).

Ainsi dans la suite de ce chapitre on associera la technique dite du **retour à l'unité** (calcul de la valeur de l'unité) avec la théorie des proportions. De la même manière on associera les propriétés additives et multiplicatives avec la linéarité. Il y a clairement un saut épistémologique entre l'utilisation des propriétés additives et multiplicatives (addition/multiplication) et le retour à l'unité (division).
Les deux conceptions **théorie des proportions** et **linéarité** ne sont pas antinomiques et sont même appelées à coexister lorsque les élèves ont le bagage mathématique suffisant pour faire vivre ces deux théories (c'est-à-dire lorsque les fractions sont aussi reconnues comme des divisions).
Il est important (mais sans doute évident) de rappeler que l'étude de la proportionnalité doit être adaptée aux connaissances des élèves dans le domaine numérique (nombres entiers, puis décimaux).

Différents types de problèmes pour une progressivité dans les procédures de résolution

Les exemples ci-dessous n'ont pas la prétention d'être des situations de référence mais plutôt des exemples représentatifs des différentes approches possibles. Le travail du maître par le jeu sur les variables didactiques des situations, l'entraînement des élèves par la répétition de problèmes du même style (dans des cadres et des habillages variés) pourront créer les conditions favorables d'un apprentissage de la notion de proportionnalité (reconnaissance des situations et mise en œuvre de procédures de résolution).

Travail sur les procédures et le raisonnement dans le cas de situations de proportionnalité

Deux types de travaux peuvent être menés de front pour introduire la proportionnalité.

Un travail sur les propriétés additives et multiplicatives (linéarité) dès le début du cycle 3

Exemple : 3 bandes superposables de papier bleu mises bout à bout ont la même longueur que 2 bandes superposables de papier rouge mises bout à bout. Combien de bandes rouges vont être nécessaires pour réaliser la même longueur que 6 bandes bleues ? 15 bandes bleues ? 42 bandes bleues ? Combien de bandes bleues vont être nécessaires pour réaliser la même longueur que 12 bandes rouges ?

Cet exemple (tout comme l'exemple de l'empilement des cubes) présente plusieurs intérêts majeurs. Le rapport 3 pour 2 peut être modifié pour différencier le niveau

Retour au sommaire

de difficulté. Les questions peuvent également impliquer des changements de procédure (passer du champ additif pour les **petits nombres** au champ multiplicatif pour les **grands nombres**, étudier les bandes bleues en fonction des bandes rouges et vice-versa). Enfin cette situation propose une validation par le milieu matériel simple et efficace (l'élève doit anticiper les réponses et peut les vérifier par manipulation).

Un travail sur le retour à l'unité[10] (proportion) dès le CM1

Exemple : Dans un magasin A, on vend des stylos, 4 pour 2 euros. Dans un magasin B, on vend les mêmes stylos 2,50 euros les 6. Dans quel magasin trouve-t-on les stylos les moins chers ?

Dans cet exemple, on privilégiera le retour aux prix unitaires des stylos. Le rapport entre prix et nombre de stylos peut être modifié pour différencier le niveau de difficulté. L'habillage concret de la situation devra être discutée avec les élèves pour lever les ambiguïtés (ce ne sont pas des lots de stylos, on peut acheter les stylos à l'unité, on n'a pas de remise si on en prend beaucoup, etc.)
On notera que l'exemple sur les bandes de papier peut se traiter par retour à l'unité (1 bande rouge vaut 1,5 bande bleue) et que l'exemple des stylos peut se traiter par linéarité (dans A, 12 (3 × 4) stylos coûtent 6 (3 × 2) euros alors que dans B, 12 stylos ne coûtent que 5 euros).
Ces situations permettent de mettre en relief les procédures des élèves (additions réitérées, multiplication, division, retour à l'unité, etc.) et aussi de repérer les procédures erronées pour les mettre en débat afin de les dépasser :

Exemple : Si 3 bandes bleues valent 2 bandes rouges, alors 6 bandes bleues valent 5 bandes rouges (« on soustrait 1 »). Si 4 stylos valent 2 euros, alors 6 stylos valent 4 euros (« on ajoute 2 »). Cette erreur bien identifiée dans la littérature provient de la persistance du modèle additif (« pour 2 stylos de plus, je paye 2 euros de plus »).

Reconnaissance de situations de proportionnalité

Dans beaucoup de cas, la proportionnalité relève du contexte de l'énoncé (connaissance sociale). Il s'agit de lever les implicites par discussion avec les élèves et de comparer des situations de proportionnalité avec des situations de non-proportionnalité. Certaines situations sont classiques pour travailler la proportionnalité (et peuvent être abordées, pour certaines, dès le CP) :

Exemple : Le change de monnaie (euros/dollars…). Les conversions d'unités (centimètres/*inches*…). Les recettes de cuisine. Prix à payer en fonction du nombre de pains achetés. Prix à payer en fonction de la masse achetée…

Attention, les conversions d'unités du type kilogrammes/grammes sont des cas particuliers de situations de proportionnalité avec un coefficient 1 000 et apparaissent de ce fait comme des problèmes de numération, c'est-à-dire mettant en œuvre des connaissances relatives à la désignation des nombres.
D'autres situations peuvent sembler relever du modèle proportionnel mais n'en relèvent pas.

10. Attention, dans certains contextes, le retour à l'unité n'a pas de sens concret (ainsi, avec 2 baguettes je prépare les sandwiches de 5 élèves, donc avec 1 baguette je prépare les sandwiches de 2,5 élèves…).

Retour au sommaire

Exemple : Taille et poids. Tarifs de taxi. Nombre de buts par matchs. Nombre d'enfants par famille…

Il s'agit de comprendre la distinction entre proportionnalité et croissance (toujours dans l'optique de dépasser l'obstacle de la persistance du modèle additif). Il est important de bien préparer l'argumentation pour prouver qu'une situation relève, ou non, du modèle proportionnel. La confrontation de l'élève à des situations de non-proportionnalité est primordiale pour la reconnaissance du modèle proportionnel. Cet aspect peut être abordé avec des élèves de CM2 qui ont déjà travaillé sur la proportionnalité.

Exemple : Prix à payer en fonction du nombre d'entrées au cinéma.

– si le billet est à tarif unique il y a proportionnalité (pour six personnes on paye deux fois plus que pour trois personnes (utilisation de la propriété multiplicative ou additive) ou six fois plus cher que pour une personne (retour à l'unité) ;
– si le billet n'est pas à tarif unique (un prix pour les adultes, un prix pour les enfants) alors il n'y a pas proportionnalité (six personnes ne paieront pas forcément deux fois plus cher que trois personnes). Il serait intéressant de comprendre qu'il y a proportionnalité dans chaque catégorie (les enfants et les adultes), car dans la vie courante la proportionnalité apparaît généralement sous cette forme.

Exemple : Reconnaître un agrandissement de polygone tracé sur papier quadrillé.

Il s'agit de comprendre qu'un agrandissement respecte les proportions (les rapports entre les mesures des côtés). Comme beaucoup de termes mathématiques, le mot agrandissement est ambigu. En effet dans le langage courant un agrandissement désigne généralement une augmentation sans conservation des rapports (« agrandir une maison » par exemple). Alors qu'en mathématiques le mot agrandissement désigne une transformation qui conserve les proportions (au sens des homothéties). Cette polysémie peut être la source d'incompréhensions et d'obstacles.

Introduction du tableau de proportionnalité

Le tableau de proportionnalité classique (en lignes ou en colonnes) est une schématisation qui condense l'information d'un énoncé ainsi que la question posée. La partie « organisation et gestion de données » du programme officiel de l'école élémentaire insiste sur « les capacités d'organisation et de gestion des données », et « apprendre à trier des données, à les classer, à lire ou à produire des tableaux ». Résumer un énoncé de problème de proportionnalité en un tableau nécessite un apprentissage et un entraînement. Les tableaux peuvent être introduits de manière relativement naturelle (lecture de tableau au CP/CE1 et réalisation de tableau dès le CE2).

Exemple : Jeux du banquier et change de monnaie. Les élèves collent les étiquettes qui se correspondent en euros et en dollars les unes en face des autres et font apparaître les opérateurs qui justifient les correspondances.

« Construire un tableau de proportionnalité » et « compléter un tableau de proportionnalité » donné sont des travaux à mener avec les élèves. Construire un tableau permet d'identifier les grandeurs en jeu dans un énoncé, les classer et gérer les données. Compléter un tableau permet de travailler spécifiquement les techniques de recherche de quatrième proportionnelle (connaissant trois termes d'une proportion, on demande de calculer le quatrième). Il est également important de confronter les

Retour au sommaire

élèves avec des tableaux pré-remplis qui ne résument pas des situations de proportionnalité pour parer à l'amalgame « tableau, donc proportionnalité » (en CM2).

Exemple : Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètres)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ?

Le travail sur les tableaux de proportionnalité peut être accompagné de construction d'une représentation graphique de la fonction linéaire sous-jacente. L'étude du graphique permet de trouver de nouvelles correspondances.

Travail sur la règle de trois (le retour à l'unité)

Comme il a été précisé, la règle de trois[11] nécessite la compréhension de la fraction en tant que division. Pour autant la technique du retour à l'unité peut être automatisée en trois temps (règle des trois temps) comme dans l'exemple suivant.

Exemple : Le prix de 3 baguettes est 2,40 €. Combien valent 5 baguettes ?

La règle de trois (ou retour à l'unité) peut s'appliquer de la façon suivante[12] : Si 3 baguettes valent 2,40 €, alors 1 baguette vaut 2,40 € ÷ 3 = 0,80 €, donc 5 baguettes valent 0,80 € × 5 = 4 €.
Avec des valeurs numériques adaptées, la recherche d'une quatrième proportionnelle par retour à l'unité peut tout à fait être envisagée avec des élèves de CM1.
L'automatisation de techniques (telle que la règle de trois) ne doit pas supplanter les procédures de résolution simples (basées sur des reconnaissances de relation entre les nombres en jeu).

Exemple : Le prix de 3 baguettes est 2,40 €. Combien valent 12 baguettes ?

La règle de trois est ici superflue, il suffit de comprendre que l'on doit payer 4 fois plus cher. La relation interne (c'est-à-dire la relation entre deux nombres ou deux grandeurs mesurées d'une même série, ici : on passe de 3 à 12 baguettes, la relation interne est « × 4 ») est simple et on peut l'utiliser directement pour répondre à la question. La relation externe (c'est-à-dire la relation entre deux valeurs de deux séries différentes, ici : 3 baguettes valent 2,40 €, la relation externe est « × 0,8 ») est complexe et n'est pas directement utilisable. Les relations internes et externes sont des variables didactiques importantes de ce genre de situations.

11. L'appellation « règle de trois » provient d'une catégorisation des problèmes de proportionnalité. Connaissant trois termes d'une proportion on demande le quatrième (la règle de trois est une technique de recherche d'une quatrième proportionnelle). Attention à ne pas confondre avec le produit en croix qui est étudié au collège.

12. Que cherche-t-on ? On cherche un prix. Que sait-on sur les prix ? 2,40 € pour 3 baguettes alors 1 baguette vaut 3 fois moins, ou 2,40 € ÷ 3 et pour 5 baguettes on paye 5 fois plus, ou 2,40 € × 5 ÷ 3 = 4 €. Les unités sont conservées. L'écriture fractionnaire n'est pas utile dans un premier temps (elle devient raisonnable quand la simplification de fractions est connue).

Retour au sommaire

Le champ conceptuel de la proportionnalité (au CM2)

Comparaison de proportions

Le problème de la comparaison de proportions peut être considéré comme un problème de réinvestissement de la notion de proportionnalité. Ce type de problème peut être proposé en fin de cycle 3.

Exemple : Pierre mélange 4 cl de sirop et 11 cl d'eau. Léa mélange 6 cl de sirop et 19 cl d'eau. Quelle boisson a le plus de goût ?

Il s'agit de comparer deux situations qui induisent chacune une situation de proportionnalité de manière implicite. Beaucoup de procédures sont envisageables pour donner une solution à ce problème ce qui peut générer des débats riches et instructifs. Ci-dessous nous détaillons deux procédures basées sur la linéarité.
Quantité d'eau à volumes de sirop égaux :
Pierre met 4 cl de sirop pour 11 cl d'eau. Pour 12 cl de sirop il mettrait 33 cl d'eau (propriété multiplicative). Léa met 6 cl de sirop pour 19 cl d'eau. Pour 12 cl de sirop, elle mettrait 38 cl d'eau (propriété multiplicative). À volumes de sirop égaux (12 cl) Pierre met moins d'eau, c'est sa boisson qui a le plus de goût.
Quantité de sirop à volumes d'eau égaux :
Pierre met 11 cl d'eau pour 4 cl de sirop donc il mettrait 11 cl × 19 = 209 cl d'eau pour 4 cl × 19 = 76 cl de sirop. Léa met 19 cl d'eau pour 6 cl de sirop donc elle mettrait 19 cl × 11 = 209 cl d'eau pour 6 cl × 11 = 66 cl de sirop. À volumes d'eau égaux, Pierre mettrait plus de sirop, c'est sa boisson qui a le plus de goût.

Proportionnalité et pourcentages[13]

Un pourcentage est un coefficient de proportionnalité qui s'écrit comme une fraction de dénominateur 100. Au cycle 3, les pourcentages sont travaillés dans un contexte partie/tout et le symbole % est explicité. Les procédures sont similaires au raisonnement proportionnel.

Exemple : L'école compte 320 élèves dont 45 % de garçons. Combien y a-t-il de garçons ?

Linéarité. Sur 100 élèves il y a 45 garçons. Sur 3 × 100 élèves il y a 3 × 45 = 135 garçons et pour 20 (100 ÷ 5) élèves il y a 45 ÷ 5 = 9 garçons. Donc il y a 146 garçons.

Exemple : Le vendeur offre une remise de 12 % sur un appareil à 230 €. Quel est le montant de la remise ?

Proportion. 1 % de 230 €, c'est 230 ÷ 100 = 2,30 €. Donc 12 % de 230 € c'est 12 × 2,30 = 27,60 €. Le travail répété de telles situations doit finir par déboucher sur le fait que « prendre 12 % d'une quantité c'est multiplier cette quantité par 0,12 ».
Il est également important de faire le lien entre certains pourcentages et les fractions simples correspondantes (50 % et ½, 25 % et ¼, 75 % et ¾).

13. Les augmentations et les diminutions seront institutionnalisées au collège (« augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95 » sont des notions à rapprocher du lien entre proportionnalité et fonctions linéaires).

Retour au sommaire

Proportionnalité et vitesses moyennes

La vitesse moyenne est une **grandeur quotient**[14]. La notation km/h (ou m/s) est explicitée. Elle exprime la distance parcourue par unité de temps[15] (généralement des kilomètres par heure ou des mètres par seconde). Il semble donc que le retour à l'unité soit privilégié (nombre de km en 1 heure) mais dans beaucoup de contextes un raisonnement basé sur les propriétés de linéarité suffit.

Exemple : Un train roule pendant 2 h 30 min à 120 km/h de moyenne. Quelle distance aura-t-il parcourue ?

Le procédé qui consiste à utiliser le tableau de proportionnalité ci-dessous est bien compliqué par rapport au raisonnement suivant : en une heure le train parcourt 120 km, donc en 2 heures il parcourt 240 km et en une demi-heure (120 ÷ 2 = 60 km), donc en 2 h 30 min (240 km + 60 km = 300 km au total).

Durée (heure)	1	2,5
Distance (km)	120	

Exemple : Un cycliste roule à 7 m par seconde en moyenne. Quelle distance parcourt-il en un quart d'heure ?

Ce problème est complexe car il suppose la connaissance du rapport entre minute et seconde et la reconnaissance du modèle proportionnel. Un quart d'heure égale 15 minutes, soit 15 × 60 secondes = 900 secondes, donc le cycliste parcourt 900 × 7 m = 6 300 m (ou encore 6,3 km).

Le calcul d'une vitesse moyenne (et plus généralement d'une grandeur quotient) est généralement complexe pour des élèves de CM2. On pourra cependant proposer de telles activités en atelier de recherche.

Exemple : Un avion met environ 3 h 30 pour faire 2 400 km. À quelle vitesse moyenne vole-t-il ?

Il s'agit de calculer le nombre de km parcourus en 1 heure (retour à l'unité). L'utilisation de la calculatrice permettra de donner une valeur approchée du résultat.

Proportionnalité et échelles

Une échelle est un coefficient de proportionnalité entre les distances réelles et les distances représentées. Les échelles peuvent être données de quatre manières différentes[16].

Exemple : 1/25 000, « 1 cm représente 250 m », 250m. « on multiplie les distances mesurées sur la carte par 25 000 ». À l'école élémentaire, on utilise les échelles pour calculer la distance réelle connaissant la distance représentée (ou l'inverse), dans le cadre d'échelles classiques. Les exercices basés sur des cartes de la localité de l'école rencontrent généralement un vif intérêt chez les élèves.

On parle également d'échelle pour le grossissement des microscopes (ou loupe, ou télescopes), ce qui peut donner des problèmes intéressants basés, par exemple, sur des photos d'animaux microscopiques (ou sur des photos de planètes).

14. Une grandeur quotient est une grandeur qui s'exprime comme le quotient de deux unités (exemple : km/h, m/s, kg/m³, m³/s, g/l, €/kg…).
15. L'explicitation et l'utilisation de la formule « v = d/t » n'est pas au programme de l'école élémentaire.
16. L'expression de l'échelle sous la forme « 1/k » renvoie à une conception « fonction – coefficient de proportionnalité » (multiplication par 1/k) alors que l'expression « 1 cm représente… » renvoie à une conception « scalaire - linéarité ».

Les procédures sont encore une fois la linéarité et/ou le retour à l'unité.
Une échelle est une grandeur quotient particulière (les deux unités du quotient sont les mêmes) ce qui explique en partie la difficulté inhérente à cette notion. Le calcul d'une échelle est donc complexe pour des élèves de CM2. Pour autant, on pourra soumettre certains problèmes de calcul d'échelle en atelier de recherche.

Exemple : Sur une photo, la tour Eiffel mesure 5 cm alors que dans la réalité elle mesure 325 m. Quelle est l'échelle de cette photo ? La réponse attendue peut être sous la forme : « 1 cm représente… ».

Exemple de résolution de problème par des techniques de CM2 et de collège

Le problème présenté dans cette partie peut être proposé en cycle 3 et au collège. Les procédures de résolution proposées ne sont pas pour autant considérées comme de plus en plus expertes, le but étant seulement d'illustrer les multiples facettes de la notion. Bien entendu, les valeurs numériques peuvent être adaptées au niveau des élèves.

Exemple : On dispose d'un lot de billes toutes identiques. L'enseignant pèse un paquet de 12 billes. Il trouve 63,6 g. Quelle est la masse d'un lot de 18 billes ? De 6 billes ? De 51 billes ?

Procédures envisageables au cycle 3[17]

Linéarité : Si 12 billes pèsent 63,6 g alors 6 billes pèsent 63,6 g ÷ 2 = 31,8 g (propriété multiplicative avec coefficient ½). Et 18 billes ont la même masse que 12 billes et 6 billes, donc 18 billes pèsent 63,6 g + 31,8 g = 95,4 g.
Retour à l'unité (règle de trois) : Si 12 billes pèsent 63,6 g alors une bille pèse 63,6 g ÷ 12 = 5,3 g. Donc 18 billes pèsent 18 × 5,3 g = 95,4 g puis 6 billes pèsent 6 × 5,3 g = 31,8 g et 51 billes pèsent 51 × 5,3 g = 270,3 g.

Procédures envisageables au collège

Linéarité (6e) : On remarque que 12, 18, 6 et 51 sont des multiples de 3… il suffit donc de connaître la masse de 3 billes. Or si 12 billes pèsent 63,6 g alors 3 billes pèsent 63,6 g ÷ 4 = 15,9 g (propriété multiplicative avec coefficient ¼). Donc 18 billes pèsent 6 × 15,9 g = 95,4 g puis 6 billes pèsent 2 × 15,9 g = 31,8 g et 51 billes pèsent 17 × 15,9 g = 270,3 g. Cette procédure ne diffère pas beaucoup du retour à l'unité…
Les procédures suivantes reposent sur la construction préalable du tableau de proportionnalité qui résume la situation.

Nombre de billes	12	18	6	51
Masse en gramme	63,6		?	?

Coefficient de proportionnalité (6e, 5e) : Pour passer de la ligne « nombre de billes » à la ligne « masse » on multiplie par 63,6 : 12 = 5,3. Il suffit ensuite de calculer…
Produit en croix (4e) : (18 × 63,6) ÷ 12 = 95,4 puis (6 × 63,6) ÷ 12 = 31,8 et (51 × 63,6) ÷ 12 = 270,3.

17. On ne propose que les procédures les plus réalistes.

Retour au sommaire

Utilisation d'un graphique (4^e, 3^e) : On trace la droite qui passe par (0 ; 0) et par (12 ; 63,6) dans un repère bien choisi (ou sur logiciel) et on lit les ordonnées des points d'abscisses 18, 6 et 51.
Utilisation de la fonction linéaire sous-jacente (3°) : La situation est modélisée par la fonction f définie par $f(x) = 5{,}3\,x$. Il suffit de calculer $f(18)$, $f(6)$ et $f(51)$.

Conclusion

Il suffit de regarder l'évolution des programmes de l'école élémentaire et plus précisément la manière de traiter la proportionnalité pour se rendre compte que le sujet est vaste et compliqué à enseigner. L'intérêt premier de cette notion est la quantité de problèmes qu'elle permet de traiter et l'étendue de son champ conceptuel. Les nombreuses propriétés de la proportionnalité permettent de travailler et de revisiter de nombreux champs et cadres mathématiques (nombres, grandeurs, calcul, géométrie, graphique, raisonnement…).
Une fois les procédures de base établies et automatisées par leur répétition (linéarité, retour à l'unité, règle de trois…) le travail de l'enseignant consistera à faire prendre conscience aux élèves, que pour une situation donnée, une procédure peut être plus pertinente qu'une autre et non d'imposer de modéliser la situation dans un cadre rigide. C'est la multiplicité des approches et la maîtrise de modes de raisonnement et de techniques variés qui permettront aux élèves de construire le sens de cette notion essentielle et d'apprendre progressivement à résoudre les problèmes qui en relèvent.

Bibliographie

- *Bulletin Officiel* hors-série n° 3 du 19 juin 2008.
- *Le Socle commun des connaissances et des compétences* – décret n° 2006-830 du 11 juillet 2006.
- **BOISNARD D., HOUDEBINE J., JULO J., KERBOEUF M-P., MERRI M.,** *La Proportionnalité et ses problèmes*, Paris, Hachette, 1994.
- **DOUADY R.,** « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 7/2, 1986.
- **DURPAIRE J.L., MÉGARD M.,** (dir.), *Le Nombre au cycle 2*, Chasseneuil-du-Poitou, CNDP, 2010.
- **ÉDUSCOL,** *Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège, Proportionnalité au collège*, en ligne http://media.education.gouv.fr, 2005.
- **ERMEL,** *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE2, CM1, CM2*, INRP, Paris, Hatier, 2001.
- **ERMEL,** *Apprentissages mathématiques en 6^e*, INRP, Paris, Hatier, 2001.
- **HERSANT M.,** *La Proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui*, Repères, IREM n°59, 2005.
- **LEVAIN J-P.,** *Faire des maths autrement, Développement cognitif et proportionnalité*, Paris, L'Harmattan, 1998.
- **LEVAIN J-P., VERGNAUD G.,** *Proportionnalité simple, proportionnalité multiple*, revue *Grand N* n°56, 1994-1995, p. 55 à 66.
- **LOMBARD P.,** *Palimpseste*, bulletin de l'APMEP n°466, 2006.
- **PFAFF N.,** *Différencier par les procédures : un exemple pour la proportionnalité au cycle 3*, revue *Grand N* n°71, 2003, p. 49 à 59.

Retour au sommaire

Partie 6

Les nombres décimaux et les fractions

Bertrand Barilly et Gabriel Le Poche

Une introduction commune précède deux articles consacrés, l'un aux fractions, l'autre aux nombres décimaux, pour des raisons historiques et mathématiques : d'une part les fractions, comme les nombres décimaux, permettent de pallier l'insuffisance des nombres entiers pour la résolution de nombreux problèmes de mesure ou de partage, d'autre part les nombres décimaux sont des nombres fractionnaires (que l'on appellera nombres rationnels au collège) particuliers, qui peuvent s'écrire sous forme de fraction dont le dénominateur est une puissance de dix.
Si, pour la clarté et la précision du propos, le choix a été fait de l'écriture de deux articles, ceux-ci sont indissociables. Les lecteurs trouveront d'ailleurs de nombreux liens et renvois.

Les nombres décimaux et les fractions à l'école primaire

Les nombres décimaux dans les programmes : un bref aperçu historique et quelques problématiques

Les nombres décimaux et les fractions sont présents dès les premiers programmes de l'école primaire de 1882. Ils sont d'abord introduits comme des nombres utiles répondant à des besoins de mesure pour des apprentissages concrets.

1882
Les mesures apparaissent dans une rubrique sur la numération décimale en CE. « Le système des mesures légales à base 10, 100, 1 000 » et « Nombres décimaux et fractions décimales » suivent en CM avec une « Idée générale des fractions ordinaires[1] ». Outre l'approche concrète indiquée, il s'agit aussi de conforter le système de mesure mis en place lors de la Révolution française : le système métrique.

1923
Les programmes mettent en avant une approche utilitariste en lien avec des mesures et des besoins pratiques. L'apprentissage des règles de calcul et leur application sont centrales.
En CE :
– notion du mètre, du franc, du gramme, de leurs multiples et sous-multiples.
En CM :
– idée générale des fractions ;
– les fractions décimales ;
– application des quatre règles[2] aux nombres décimaux.

1. L'expression fraction ordinaire est employée pour désigner une fraction dont le dénominateur n'est pas exprimé sous la forme d'une puissance de 10 : 2/7 ; 1/4…
2. « Quatre règles », expression employée pour les quatre opérations.

Retour au sommaire

Les années 1970 sont marquées par une conceptualisation des apprentissages mathématiques de l'école primaire en lien avec la préparation du secondaire : les fractions y sont définies comme des opérateurs (approche intéressante sur le plan mathématique mais très difficile et abstraite pour les élèves), et les nombres décimaux sont introduits via des changements d'unité de regroupement (ainsi 10,3 est l'écriture de 103 quand la dizaine est choisie comme nouvelle unité).
Puis, en 1980, de nouveaux programmes pour le CM font apparaître les préoccupations d'une didactique mathématique naissante.
Liée à la massification de l'enseignement en collège, la continuité école/collège se renforce de ces préoccupations didactiques. Par ailleurs, de manière générale pour l'enseignement des mathématiques, la notion de situation-problème émerge avec trois types : construire de nouveaux outils mathématiques, les exercer ou les réinvestir. Des situations complexes sont aussi évoquées en lien avec le raisonnement et la créativité.
Le programme de CM de 1980 demande :
– d'acquérir de nouvelles connaissances (dans le domaine des nombres décimaux, de la division, par exemple) ;
– d'accumuler des expériences qui serviront de support à des formalisations ultérieures (dans le domaine de la géométrie, des nombres décimaux, par exemple) ;
– N.B. : L'étude des nombres décimaux et de leur structure n'est pas achevée à la fin du cycle moyen. Elle devra se prolonger tout au long de la scolarité du collège.
Les avancées de la didactique influenceront fortement les programmes qui suivront.
Trois questions essentielles pour l'enseignement de ces nombres, au cœur des apprentissages mathématiques des programmes CE2/CM1/CM2 aujourd'hui, ressortent de cette rapide approche :
– comment enseigner fractions et nombres décimaux à l'école ?
– que doivent exactement savoir les élèves à la sortie de l'école élémentaire ?
– quelle(s) liaison(s) avec l'enseignement en collège[3] ?

Des enjeux didactiques

Pour permettre aux élèves de donner du sens à ces nouveaux nombres, et justifier leur introduction, il est nécessaire de proposer des activités qui leur permettent de prendre conscience que :
– les nombres décimaux, et plus généralement les fractions, permettent de résoudre de nouveaux problèmes ;
– l'ensemble des nombres décimaux est un sous-ensemble de celui des fractions, l'ensemble des fractions décimales qui sont alors écrites sous une autre forme ($\frac{7}{10}$ s'écrit 0,7) ;
– certains raisonnements et certaines procédures correctes avec les nombres entiers peuvent ne plus l'être avec les nombres décimaux et les fractions. Par exemple lorsque l'on compare deux nombres entiers dont le nombre de chiffres est différent, celui dont l'écriture est la plus longue est le plus grand : cela n'est plus vrai avec les nombres décimaux. Autre exemple : la notion de « nombre qui suit », qui est à la base de nombreux exercices sur les nombres entiers, n'a plus de sens pour les fractions.

3. Sur ce dernier point, on consultera avec profit le document d'accompagnement, *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège, Les nombres au collège*, mise à jour de décembre 2006, en ligne sur le site Éduscol explicitant l'approfondissement et le renforcement des connaissances et savoir-faire abordés en CM pour les fractions et les nombres décimaux.

Retour au sommaire

Les situations d'apprentissage qui permettent d'introduire et de donner du sens aux fractions et aux nombres décimaux sont variées, en lien avec les possibilités que ces nombres offrent :
– exprimer le résultat d'un mesurage (masse, longueur, aire, capacité…) ;
– graduer plus finement la droite numérique ;
– résoudre des problèmes de partage ainsi que des problèmes de calcul de quotients.

Les situations de référence de l'utilisation des nombres décimaux sont en lien avec la proportionnalité mais apportent une rupture de sens. Le plus souvent la multiplication ne peut plus être vue uniquement comme une addition itérée.

2 kg de pommes à 4 euros le kg coûtent… ?

Ici la multiplication peut être vue comme une addition réitérée : 4 € × 2 = 4 € + 4 € = 8 €. Les deux kilogrammes de pommes coûtent donc 8 euros.

2,5 kg de pommes à 4 euros le kg coûtent… ?

L'itération n'est ici plus possible. Pour résoudre ce mini-problème, un raisonnement peut amener l'élève à considérer 2,5 kg comme deux kilogrammes et demi afin de calculer le prix de l'achat : 4 € + 4 € auxquels on ajoute la moitié de 4 € correspondant au prix d'un demi-kilogramme.

2,750 kg de pommes à 4,50 euros le kg coûtent… ?

Exprimer 4,50 € × 2,750 sous forme d'une somme devient complexe.

Enfin, dans la perspective du collège, une autre question se pose : quelles procédures doivent être automatisées par les élèves du point de vue de l'interprétation des écritures fractionnaires ou décimales et de leur oralisation ; de la comparaison des nombres entre eux ; des calculs sur ces nouveaux nombres ?
Comme tous les automatismes, ceux qui sont souhaités visent à libérer l'esprit des élèves. Ils aident à une disponibilité cognitive en vue de la réflexion sur la situation proposée et ses enjeux, l'exécution des tâches « techniques » n'étant plus ni coûteuse ni hasardeuse.
Mais il faut veiller à ne pas aller trop rapidement vers ces algorithmes qui doivent s'installer progressivement, en lien avec la construction de sens. Doter les élèves de situations de référence pour la multiplication des décimaux et pour la division décimale peut contribuer à cet objectif.

Un apprentissage qui peut être perturbé par de fausses représentations.

Lorsque l'on pense « fraction », on pense d'abord partage en lien avec la vie courante (parts de gâteau, mélanges…) et « naturellement » quantité inférieure à l'unité. La fraction est aussi appréhendée comme opération de partage d'un tout (on en prend chacun la moitié [du gâteau, des billes…]). Envisager les fractions supérieures à 1 et considérer les fractions comme des nombres se heurtent à ces conceptions premières. Les objectifs d'apprentissage qui s'y réfèrent doivent être introduits par des situations spécifiques.
Les nombres décimaux sont, eux, d'abord perçus comme des « nombres à virgule » qui sont d'ailleurs souvent notés avec des points par les calculatrices, balances électroniques… Ils sont reconnus comme des nombres, des nouveaux nombres que l'on aborde en cycle 3. On considère plus difficilement certains d'entre eux comme

Retour au sommaire

de nouvelles écritures des entiers connus (la dématérialisation monétaire et les prix d'appel font que les enfants sont moins confrontés à des prix à payer du type 12 € écrit 12,00 € puisque l'on paie rarement avec de la monnaie et qu'un prix d'appel peut être de 11,99 €).
De nombreuses erreurs de comparaison ou de calcul sont basées sur une représentation d'un nombre décimal comme un couple de nombres entiers séparés par un signe. Cette représentation est renforcée par l'oral : un prix de 7,89 € est le plus souvent énoncé : « sept euros quatre-vingt-neuf ».
Parfois des formulations hâtives des savoirs sur les nombres entiers renforcent ces difficultés :
– « Le nombre qui a le plus de chiffres est le plus grand ». Ce qui est vrai pour les nombres entiers ne l'est plus pour les nombres décimaux. L'oral courant renforce cet obstacle (voir la partie « Des obstacles pour les élèves » de l'article sur les nombres décimaux).
Il faut voir aussi dans les fractions et les nombres décimaux :
– pour certains d'entre eux, de nouvelles écritures de nombres connus (exemple : $\frac{2}{2} = 1$) ;
– pour les autres, de nouveaux nombres.
L'enseignement doit veiller à explorer et à revenir souvent sur les liens entre nombres décimaux et fractions. La seule connaissance de leurs emplois dans la vie courante enferme dans un cloisonnement qui peut parfois être constaté : les fractions d'un côté, les nombres décimaux de l'autre sans lien significatif.

Les nombres décimaux et les fractions dans la vie courante

Dans la vie courante, et cela était déjà le cas pour les deux siècles précédents, c'est en lien avec les mesures de grandeurs que l'on rencontre les nombres décimaux, principalement prix, distances, masses et contenances.
Le changement majeur avec la fin du XIXe siècle est sans doute celui introduit par le perfectionnement des instruments de mesure et par la modification du rapport à la matérialité, par exemple dans l'usage de la monnaie.
Les longueurs et distances, comme les masses, se mesurent de plus en plus sur des instruments à lecture directe. Les chaînes d'arpenteur ont été remplacées par des appareils à visée. La balance de supermarché a succédé aux balances romaines et aux balances d'épicier proches des balances Roberval pour lesquelles on utilisait des masses marquées. On y lit directement et instantanément masse et prix. Pour les élèves qui font du vélo au XXIe siècle, les appareils utilisés qui indiquent distances et vitesses ne ressemblent plus aux compteurs d'autrefois.
Les manipulations des instruments sont toujours possibles. On pourrait même penser qu'elles sont favorisées par une multiplication de ces derniers, facilitées par le libre accès des balances en supermarché, par exemple. Le rapport entre la mesure exprimée sous forme de nombre décimal et la grandeur qui est mesurée est cependant moins apparent.
Prospectus publicitaires et grandes affiches regorgent de « nombres à virgule » fréquemment rencontrés par chacun. Dans une société de l'information et de la communication, les données fourmillent : tickets de courses ; emballages de produits ; articles de journaux voire durées de performances de champions exprimées avec les unités de mesure du temps mais aussi avec des expressions « intéressantes » d'un point de vue des connaissances mathématiques (dixièmes…).

Retour au sommaire

Les fractions usuelles appartiennent, elles, davantage au domaine de l'oral : demis et quarts, les tiers sont peu usités.
Des activités de recherche de ces nombres sur différents supports de la vie courante peuvent être pratiquées avec profit dans les classes. Elles permettent des classements, l'identification de leur usage et des compréhensions contextualisées avec un effet cumulatif. Avec d'importants bénéfices pour les élèves, ces activités renforcent le sens des activités mathématiques en rapprochant savoirs scolaires et vie courante, développent des aspects transdisciplinaires (en géographie, par exemple), accentuent les liens des apprentissages sur les nombres décimaux et les fractions avec différents domaines des mathématiques (en particulier, ceux des mesures, de l'organisation et la gestion des données).

Quelques outils pratiques

Quelques notions à conforter avant d'aborder formellement les fractions

« Restituer et utiliser les tables […] de multiplication de 2 à 5 », « diviser par 2 et par 5 des nombres entiers naturels inférieurs à 1 000 […] » sont des compétences attendues à la fin du CE1, premier palier pour la maîtrise du socle commun. Elles sont indispensables. Dans les progressions jointes aux programmes, on trouve ensuite, en CE2, la compétence suivante : « Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié, triple, quart d'un nombre entier ».
Les élèves doivent connaître et savoir utiliser ces expressions parce qu'elles sont utiles dans la vie courante mais aussi parce que leur usage constitue une bonne préparation à la compréhension des fractions.
La connaissance des doubles et moitiés est particulièrement importante : des exercices de recherche des doubles et moitiés des nombres d'usage courant puis d'autres nombres moins courants, doivent être fréquemment proposés sur des durées courtes avec des réactivations systématiques des procédures et des connaissances utiles pour les élèves qui rencontrent des difficultés. La notion de parité devra être travaillée implicitement par des jeux de furet de double, par exemple. Remarquons que les relations « double et moitié », d'un usage social particulièrement important, apparaissent d'ailleurs de manière privilégiée dans les rapports entre les plus anciennes fractions écrites de l'Antiquité, comme les fractions égyptiennes (voir l'encadré dans l'article sur les fractions).
La compréhension qu'une même quantité peut s'exprimer de manières différentes est aussi fondamentale pour aborder les fractions et les nombres décimaux dont certains sont d'autres écritures des entiers naturels. La compétence de CE2 « Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30, 60 » invite à explorer différentes égalités en lien avec la numération décimale et sexagésimale (par exemple, le fait que 4×15 ; 2×30 ; 6×10 ; 60 désignent le même nombre).

Retour au sommaire

Une juxtaposition de droites graduées[4] enrichira la compréhension des nombres, grâce à des écritures différentes désignant un même nombre. Des exercices courts, gammes d'entraînement aideront à installer des représentations utiles à la compréhension et à l'utilisation de ces nombres. Des jeux numériques (jeux de « bataille » avec des cartes numériques, lotos numériques…) peuvent aussi faciliter ces entraînements.

Les droites ou demi-droites graduées permettent de visualiser des problèmes d'ordre et d'intercalation. Par exemple, une graduation en demis juxtaposée à d'autres graduations en dixièmes et centièmes permet de repérer, entre autres que $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100}$ alors qu'une graduation en tiers met en évidence peu de coïncidences.

La graduation en dixièmes, où figurent toutes les écritures ($\frac{1}{2}$; $\frac{2}{10}$… $\frac{10}{10}$; $\frac{11}{10}$…), peut ensuite se simplifier sur des choix explicités privilégiant quelques repères choisis. Cela permet alors des situations d'interrogation ou d'écriture (par exemple, « quel(s) nombre(s) correspond(ent) à cette graduation ? » ou « quel nombre exprime la mesure de la distance entre ces deux graduations ? »).

Compréhension, repérage, mémorisation des nombres, des rapports entre écritures en sont facilités.

« Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million » en CE2 succède aux attendus de fin de CE1. La compréhension et la maîtrise de la valeur relative d'un chiffre, du nombre de…, sont à conforter sur les nombres entiers avant d'aborder les nombres décimaux. Pour des élèves aux compétences fragiles, des séances d'aide personnalisée réactivant et entraînant des compétences de cet ordre peuvent représenter des aides préventives avant d'aborder les nouveaux nombres en CM. Le travail mené sur les nombres décimaux confortera à son tour la connaissance des entiers.

Des « bandes numériques » et « livres à compter » à des repères adaptés au cycle 3

Dans les classes de maternelle, de CP et de CE1, figurent très fréquemment des « bandes numériques » sur les nombres entiers en filiation de premiers repères d'« activités rituelles » sur le calendrier et les comptages absents/présents. Leur usage doit évoluer vers des graduations dès le cycle 2. Ce passage nécessaire s'appuiera sur les opportunités qu'auront les élèves dans diverses situations de calcul, d'exploration de grandeurs et mesures de constater, sans anticiper des apprentissages, qu'il y a bien quelque chose entre deux nombres entiers (partages, prix courants, mesures de longueur…). L'usage des droites graduées doit être poursuivi tout le long de la scolarité primaire pour mettre en évidence des écritures équivalentes et de nouveaux nombres.

4. Les nombres entiers se succèdent sur les bandes numériques. Cette représentation est un obstacle à la compréhension des fractions, des décimaux… Sur une droite graduée, des intervalles existent entre les nombres entiers. C'est un point d'appui essentiel pour construire une représentation mentale qui facilite la compréhension des fractions et des décimaux positionnés sur des graduations intermédiaires. La comparaison de ces nombres est aussi facilitée. Les programmes 2008 emploient le terme de droite graduée pour le cycle 3, « repérage sur une droite graduée », en ce qui concerne les nombres entiers naturels, les nombres décimaux et les fractions. Il s'agit principalement d'une demi-droite graduée à partir du zéro même si les élèves découvrent, à travers la mesure des températures, l'existence des nombres négatifs. C'est au collège que la droite numérique sera abordée.

Retour au sommaire

D'une manière similaire, les livres à compter[5] sont des outils pédagogiques dont on peut observer l'usage et l'intérêt dans les pratiques en maternelle. Ils permettent, entre autres, de faire cohabiter différentes écritures d'un même nombre.
Leur utilisation en CP et CE1 pourrait être poursuivie avec tout l'intérêt du formalisme de l'écriture mathématique qui apparaît alors et peut donner lieu à des jeux d'écritures équivalentes.

6	5 + 1 10 – 4 2 x 3…

5	4 + 1 2 + 3… 6 – 1 10 – 5…

En CE2 et CM, des traces inspirées de ces outils pourraient trouver leur intérêt pour :
– la mise en évidence des relations arithmétiques entre les nombres d'usage courant (double, moitié, quart, triple, tiers) ;

25	5 x 5 C'est la moitié de 50. C'est le quart de 100. 50 : 2 100 : 4 C'est le tiers de 75.

– des connaissances élémentaires des nouveaux nombres (avec les écritures fractionnaires ou décimales).

$\mathbf{\frac{1}{2}}$	C'est la moitié de 1. 0,5 0,500 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$

0,1	C'est un dixième. $\frac{1}{10}$ $\frac{10}{100}$ $\frac{2}{20}$… C'est un nombre exprimant des relations entre des longueurs.

Ces traces devraient constituer des écrits de référence consignés dans des « cahiers de nombres » à usage personnel ou dans des affichages collectifs évolutifs.
Ils complètent les cahiers-outils qui institutionnalisent les connaissances à mémoriser issues des situations de référence.

5. Les livres à compter sont des albums qui offrent à la fois un récit et une activité de numération pour les jeunes enfants. Un article de la revue, *Grand N*, écrit par Dominique Valentin (n° 52 p.11-21, 1992-1993) les présente et en explicite les intérêts pédagogiques.

Retour au sommaire

Partie 7

Les fractions

Bertrand Barilly et Gabriel Le Poche

Le point de vue mathématique

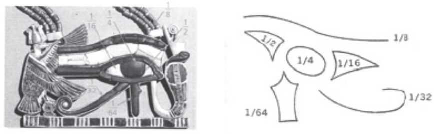
Un concept ancien

Les fractions sont d'un usage ancien. On en trouve des traces écrites, par exemple, en Mésopotamie vers 2 500 ans avant notre ère. Leur histoire et leur écriture sont liées à celles des nombres en général. Dans certaines cultures elles étaient codées par des symboles spécifiques : c'était par exemple le cas en Égypte, comme l'illustre l'encadré ci-dessous.

Dans la numération égyptienne, le *heqat*, que l'on notera *h*, était l'unité de mesure de capacité des céréales. Les sous-unités étaient les suivantes :

$\frac{1}{2}$ h $\frac{1}{4}$ h $\frac{1}{8}$ h $\frac{1}{10}$ h $\frac{1}{32}$ h $\frac{1}{64}$ h

Ces six fractions unaires, c'est-à-dire de numérateur égal à 1 utilisées comme mesures de capacité, étaient représentées par les six parties différentes de l'œil d'Horus.



La somme des six fractions unaires est strictement inférieure à 1 (le « morceau » manquant de l'œil d'Horus était la quantité de céréales accordée aux scribes).

Document issu du sujet zéro CRPE 2011, épreuve d'admissibilité mathématiques-sciences.
(http://media.education.gouv.fr/file/sujets_0/14/1/sujet0_deuxieme_epreuve_1_137141.pdf)

La notation fractionnaire actuelle des fractions à l'aide des chiffres et du trait de fraction, plus récente, est d'origine indienne et arabe. L'écriture même des chiffres, la façon de positionner le numérateur et le dénominateur, l'utilisation d'un trait pour les séparer, tout cela s'est mis en place progressivement. Cette notation est arrivée en Europe au Moyen Âge par l'intermédiaire de travaux d'érudits arabes pour écrire ce qu'on appelait alors les « nombres rompus » (l'étymologie de fraction, le mot latin *fractio* indique une action de briser, de rompre).
En effet les fractions décimales, d'un usage courant aujourd'hui, sont apparues plus tardivement que les fractions unaires. Théorisées par des mathématiciens arabes (comme Ibrahim al Uqlidisi, 920-980) puis par un mathématicien perse (Jemshid ibn Massoud al Kashi, 1380-1430), elles ont été introduites en Europe comme outil pratique au service du calcul par le brugeois Stévin (*De Thiende*, *La Disme*, 1585 soit, en français moderne, *Le dixième*). Leur écriture à virgule, qui est à l'origine de l'intérêt pour l'ensemble des nombres décimaux, découle de ces travaux.

Retour au sommaire

L'écriture et l'usage des nombres décimaux se sont ensuite développés à partir de la fin du XVIII[e] siècle. Et si ces nombres sont désormais très présents dans les écrits sociaux, l'histoire nous enseigne que la compréhension de ce qu'ils représentent et leur usage pour mesurer ou pour calculer n'ont en fait rien d'évident : c'est au maître d'aider les élèves de CM à s'approprier ces nombres que les mathématiciens ont mis si longtemps à découvrir et à organiser !
Comme souvent, pour les enseignants, connaître l'histoire d'un concept peut permettre de mieux comprendre les enjeux didactiques liés à son enseignement, que ce soit pour repérer des points d'appui ou pour anticiper les difficultés conceptuelles ou d'appropriation des codages.

L'approche actuelle

Le terme **fraction** est couramment utilisé pour désigner une **écriture fractionnaire d'un nombre rationnel**, que jusqu'à la fin du collège on appelle aujourd'hui **nombre fractionnaire**.
Le nombre **rationnel** $\frac{a}{b}$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue x :
$x \times b = a$
où a est un nombre entier naturel quelconque et b un nombre entier naturel non nul.
Si l'on convient que le trait indique une division, le nombre $\frac{a}{b}$ peut donc être considéré comme le **quotient des deux nombres entiers a et b**.

Dans l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$, a est appelé **numérateur**, b **dénominateur** et le

trait qui les sépare est appelé trait de fraction. L'écriture **fractionnaire irréductible** est l'écriture obtenue après simplification complète, dans laquelle numérateur et dénominateur sont premiers entre eux[1]. Par exemple :

$\frac{2}{3}$ est l'écriture fractionnaire irréductible de $\frac{30}{45}$

car $\frac{2}{3} = \frac{30}{45}$ et 2 et 3 sont premiers entre eux.

Une **fraction décimale** est une écriture fractionnaire dont le dénominateur est une puissance de 10 ; on parle alors d'écriture fractionnaire décimale. Par exemple :

$\frac{75}{100}$ et $\frac{15}{10}$ sont respectivement des écritures fractionnaires décimales des nombres rationnels $\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{2}$.

Les nombres rationnels qui possèdent une écriture fractionnaire décimale sont appelés nombres décimaux.

1. Ils n'admettent pas d'autre diviseur commun que 1.

L'ensemble des nombres décimaux est strictement inclus dans celui des nombres rationnels puisque tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels mais que tous les nombres rationnels ne sont pas des nombres décimaux. Par exemple :

$\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel mais n'est pas un nombre décimal.

Entre les nombres entiers et les fractions, il existe un saut conceptuel qui constitue un enjeu majeur du cycle 3.
Il est nécessaire de bien le préparer et d'envisager les soubassements dans les programmes des années antérieures en y consacrant le temps nécessaire.
L'insuffisance des nombres entiers pour exprimer le résultat d'un mesurage, pour indiquer un emplacement particulier sur la droite numérique ou pour déterminer ou approcher le quotient de deux nombres entiers (partager un gâteau entre 4 personnes ou deux gâteaux entre trois personnes), est à la base de situations d'apprentissage qui motivent l'introduction de ces nouveaux nombres et leur donnent du sens.
L'installation de connaissances sur les fractions basées sur une compréhension de ce que sont ces nombres demande du temps. Cette réflexion a une conséquence sur la programmation : les apprentissages sur les fractions doivent commencer très tôt dans l'année de CM1. Cela permet de présenter des situations variées et nombreuses, de laisser à tous les élèves le temps de comprendre et de s'approprier les atouts et les spécificités de ces nombres. Une approche plus tardive et donc plus concentrée se ferait au détriment des élèves aux compétences mathématiques les plus fragiles. Faute d'un temps suffisant, les apprentissages ne s'appuieraient pas alors, pour eux, sur une véritable compréhension. Et les savoir-faire sur les fractions puis sur les fractions décimales et donc les nombres décimaux risqueraient alors de n'être que des mécanismes vides de sens trouvant leurs limites dans chaque situation nouvelle.

L'enseignement en cycle 3 de différents sens d'une fraction

Les programmes 2008

« Progressions pour le cours élémentaire deuxième année et le cours moyen.
Les tableaux suivants donnent des repères pour l'organisation des apprentissages par les équipes pédagogiques. Seules les connaissances et compétences nouvelles sont mentionnées dans chaque colonne. Pour chaque niveau les connaissances et compétences acquises dans les classes antérieures sont à consolider. La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages ».

Retour au sommaire

	Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Nombres et calcul	**Les nombres entiers jusqu'au million** Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million. Comparer, ranger, encadrer ces nombres ; <u>Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier.</u> <u>Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100 ; entre 15,30 et 60.</u>	**Les nombres entiers jusqu'au milliard** Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard. Comparer, ranger, encadrer ces nombres. La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.	**Les nombres entiers**
		Fractions Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.	**Fractions** Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.

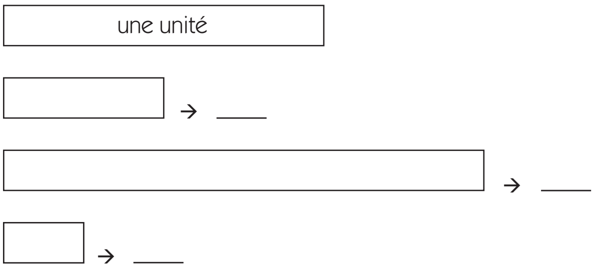
Les compétences de CE2 soulignées par nous dans le tableau sont indispensables pour aborder en CM les apprentissages formalisés qui concernent les fractions. Les opportunités de les entraîner doivent être nombreuses dès le cycle 2.
On sait déjà que le partage en deux, en quatre, est connu et compris par des élèves de maternelle (la moitié, la moitié de la moitié). Et à partir du CP, bien en amont donc de l'introduction des fractions, des situations de partage de quantités ou de longueurs en deux, en quatre, en trois, peuvent être proposées fréquemment (voir compétences du socle palier 1 : diviser par 2 et par 5 des nombres entiers inférieurs à 100 dans le cas où le quotient exact est entier ; restituer et utiliser les tables d'addition et de multiplication par 2, 3, 4 et 5). Plus tard, le retour à des situations concrètes de partage peut s'avérer utile pour certains élèves dans le cadre d'aides personnalisées. Les expressions « prendre la moitié de… » «…le tiers de… » « …le quart de… » seront quant à elles introduites dans le cadre des fonctions numériques « diviser par 2, 3 ou 4 » pour des résultats entiers au cours d'activités rituelles de calcul mental.
En CM, les fractions sont introduites le plus tôt possible tout d'abord pour pallier l'insuffisance des nombres entiers pour mesurer certaines grandeurs comme les longueurs, les aires, l'heure… mais aussi pour repérer des points sur une demi-droite graduée.
À l'école élémentaire, les fractions $\frac{5}{3}$ ou $\frac{7}{2}$ doivent d'abord être interprétées comme 5 fois le nombre $\frac{1}{3}$ ou 7 fois le nombre $\frac{1}{2}$ mais pourront aussi être vues comme des quotients, c'est-à-dire les résultats respectifs des divisions par 3 de 5 et par 2 de 7 :
– le tiers de 5 pour l'une, la moitié de 7 pour l'autre ;
– le nombre qui multiplié par 3 donne comme résultat 5 pour l'une, le nombre dont le double est 7 pour l'autre.

Retour au sommaire

L'introduction de la division décimale permet ensuite d'établir que 1,666 est une valeur approchée au millième de $\frac{5}{3}$ et que 3,5 est une écriture décimale de $\frac{7}{2}$.

Quelques situations de référence concrètes

À l'école élémentaire, l'approche des fractions est liée à des situations de référence concrètes qui sont autant de repères pour les élèves. Par exemple, la mesure de bandes de papier à l'aide d'un segment unité lorsque la longueur de ces bandes n'est pas un multiple entier de la longueur du segment unité.
Cela permet de mettre en évidence la nécessité de nouveaux nombres.



On trouve ici volontairement des bandes dont les mesures de longueur sont des fractions inférieures ou supérieures à 1. Les élèves sont amenés à utiliser des fractionnements par demi ou quart de l'unité afin de coder les mesures des longueurs des trois bandes proposées. Si les codages pour la première et la troisième bandes sont *a priori* univoques ($\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$), en ce qui concerne la deuxième bande, deux sortes de codages doivent être proposés : $\frac{3}{2}$ et $1 + \frac{1}{2}$. En fonction du moment où se situe cette activité, ce double codage permet de justifier l'égalité $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, ou bien de l'illustrer.
Des manipulations précèdent et accompagnent la présentation et la pratique de représentations chiffrées. Les pliages de bandes permettront d'explorer des graduations avec différents dénominateurs (2, 4, 8, 3, 6, 5, 10…), d'approcher l'aspect grandeur (moitié de la longueur de l'unité) et l'aspect nombre des fractions (la mesure de la longueur, le repère sur la droite graduée).
Le travail dans une famille particulière comme la famille des fractions ayant pour dénominateur une puissance de 2 (2, 4, 8…) s'avère très riche. Le matériel est facile à réaliser (partages ou fractionnements successifs par 2) et le raisonnement prépare celui qui sera développé ensuite pour les fractions décimales pour le dixième, centième et millième. Introduire des unités rigides, par exemple des bâtonnets de bois, est une variable didactique intéressante à explorer car elle oblige à d'autres stratégies que le pliage (guide-âne ou commensuration, voir infra).
Une variété des approches s'appuyant sur les formes et des grandeurs différentes (bandes, segments, aires de figures carrées ou rectangulaires ou de disques) permet de dégager progressivement le concept.
Le travail sur la droite graduée aide à donner à la fraction son statut de nombre et à visualiser le rangement et la comparaison des fractions usuelles.

Retour au sommaire

La compréhension qu'une fraction désigne aussi un nombre sera facilitée par les allers et retours entre des bandes de papier et des segments de droite, la fraction pouvant alors tour à tour désigner une mesure de longueur ou indiquer une graduation.
Les diverses représentations de fractions courantes ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$...) sur des disques, des bandes ou des quadrillages, de quelques fractions décimales ($\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$...) sur des bandes et quadrillages enrichiront avec profit les traces écrites évoquées dans la partie 6.
Les fractions décimales permettent d'introduire les nombres décimaux progressivement en jouant sur les différents codages utilisés pour les nombres décimaux : par exemple, $\frac{17}{10}$ s'écrit aussi 1,7. Deux justifications différentes peuvent apparaître :

- $\frac{17}{10}$ (17 dixièmes) c'est $\frac{10}{10} + \frac{7}{10}$ soit $1 + \frac{7}{10}$, qui s'écrit aussi 1 + 0,7 ou 1,7 ;
- $\frac{17}{10}$ c'est aussi 17 divisé par 10, c'est-à-dire 1,7.

Deux raisons qui sont liées plaident en faveur d'une attention prioritaire à l'approche des fractions courantes de numérateur 1 : l'une est historique, et est exposée plus haut ; l'autre relève davantage du champ didactique : le sens du fractionnement de l'unité en parties égales est important à acquérir pour la compréhension des fractions, des fractions décimales et donc de la numération décimale de position.
En lien avec la droite graduée, certaines connaissances sont à installer parallèlement, qui deviendront progressivement opérationnelles et mobilisables dans diverses situations : quatre quarts font un, donc $\frac{4}{4} = 1$; dix dixièmes font un, donc $\frac{10}{10} = 1$, etc.

Ces automatismes doivent s'appuyer sur des images mentales fortes : situations de référence, représentations, formulations orales et écrites.

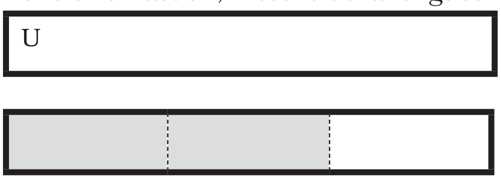
Exemples d'activités

• Mesurer des bandes

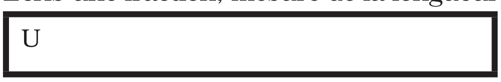
Voici une unité de longueur :

→ la mesure est 1

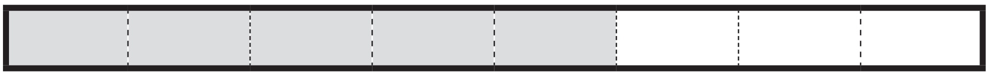
Écris une fraction, mesure de la longueur de la partie grisée.



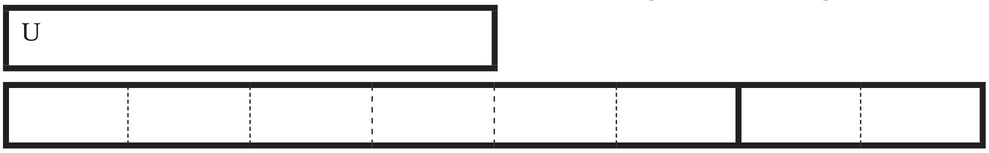
Écris une fraction, mesure de la longueur de la partie grisée.



Retour au sommaire



Indique une fraction que l'on peut écrire en face de la graduation en gras.



La dernière présentation amène aux graduations. Avec des bandes découpées, il est fort probable que des encodages $\frac{6}{4}$ et $\frac{2}{4}$ apparaissent dans les réponses des élèves.

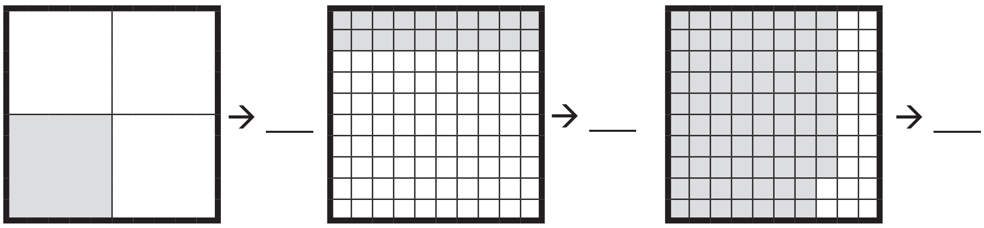
Les échanges qui en naîtront auront pour conclusion la nécessité de lever des ambiguïtés, de situer le « 0 » origine de la bande et de marquer le « 1 » repérant l'extrémité de l'unité. Ces activités conduiront à la construction de droites graduées. Par ailleurs, la découverte du fait que deux écritures fractionnaires différentes $\frac{6}{4}$ et $\frac{3}{2}$ peuvent désigner le même nombre peut apparaître.

• **Mesurer des aires**

Voici une unité d'aire :

→ la mesure est 1

Écris une fraction, mesure de l'aire de la zone grisée :



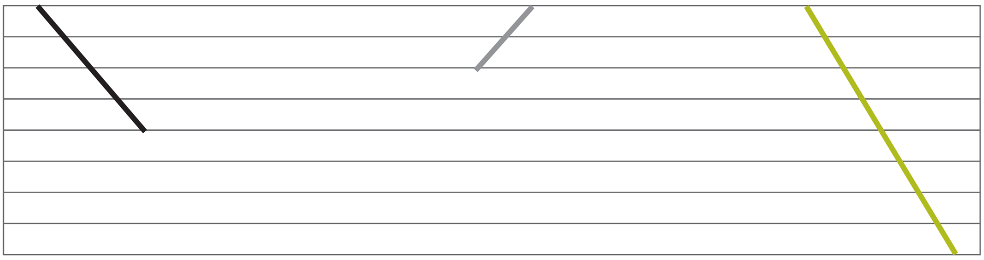
Les parties grisées du carré indiquent une partie de l'unité dans le cadre d'une nouvelle grandeur : l'aire. Le quadrillage permet un autre type de fractionnement de l'unité qui présente l'intérêt d'illustrer autrement l'idée de centième.

• **Le guide-âne**

Les activités de pliage par deux ou trois peuvent se prolonger par l'utilisation d'un « guide-âne » nécessaire pour diviser un intervalle en n segments isométriques.

Guide-âne : Constitué d'un réseau de droites parallèles équidistantes, c'est un outil qui permet de fractionner en segments de même longueur un segment de droite tracé ou reproduit sur papier-calque.

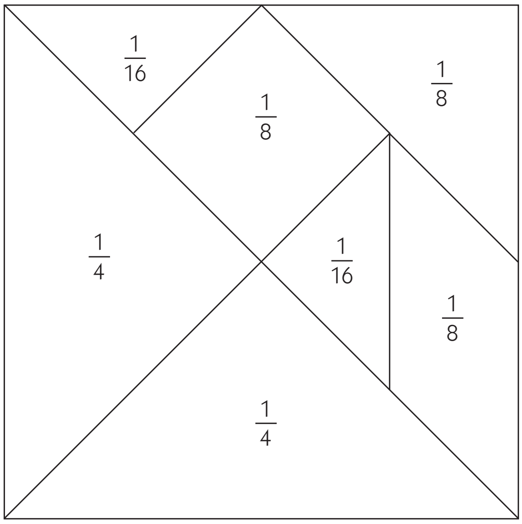
Retour au sommaire



L'usage de cet outil[2], bien en amont du CM, permet de partager un segment donné et par prolongement de graduer la demi-droite graduée en nombres entiers. Par exemple, sur un segment où les nombres 0 et 7 se situent aux extrémités, il permet de placer ou de vérifier la place de 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6. Ce type d'activités, à proposer avant l'introduction des fractions, peut aussi constituer une aide préventive pour certains élèves.

• **Le tangram**

Le tangram peut aussi être un moyen de donner du sens et de manipuler des fractions dans le cadre de la grandeur aire. À l'interface entre géométrie et mesures, il présente l'intérêt de présenter dans un contexte différent des fractions unaires ayant pour dénominateur une puissance de 2.



Deux contextes d'introduction : partage et codage de mesures

Les programmes 2008, notamment à travers la compétence de CM1 évoquée plus haut, indiquent deux contextes d'utilisation des fractions :
– partage, d'un côté ;
– codage de mesures, de l'autre.
Des illustrations en sont données après le tableau ci-dessous où le fond grisé met en évidence des approches qui relèvent davantage de la scolarité en collège.

2. Le guide-âne est ici un outil dont on découvre l'intérêt et que l'on apprend à utiliser. La compréhension de son soubassement mathématique (théorème de Thalès) s'effectuera plus tard dans la scolarité.

Les fractions		Deux contextes d'introduction	
		Partage	Codage de mesures
Trois aspects	a b^e	Partage de l'objet	Mesurage par fractionnement de l'unité
	a ÷ b	Partage de la totalité	Mesurage par commensuration*
	fonctionnel	Prendre les a b^e d'une grandeur (La fraction est ici un opérateur)	Proportionnalité entre des mesures (coefficient de proportionnalité)

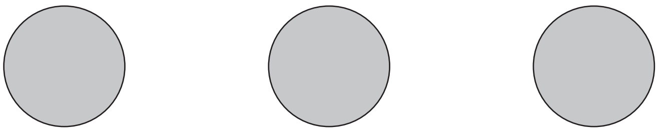
* Recherche d'une commune mesure entre deux grandeurs.

Les fractions dans le contexte de partages

Le terme de partage est ici à expliciter : il s'agit d'un partage équitable, chaque part ayant la même valeur. En lien avec la division, ce point mérite d'être souvent reprécisé, tous les partages ne se réalisant pas nécessairement avec cette même règle. Pour les élèves, la situation de partage équitable est celle de l'expérience pratique, et l'écriture fractionnaire peut alors apparaître comme un codage de ces partages.

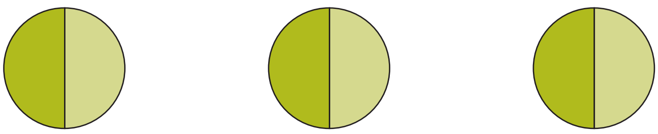
Partager 3 tartelettes identiques entre deux personnes : deux cheminements en lien avec l'expérience

Sur le plan de la représentation, il s'agit de la grandeur aire.

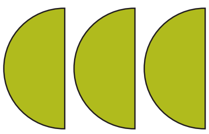
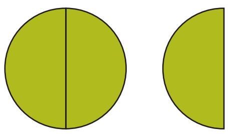


On peut soit partager chaque tartelette en deux, soit considérer la totalité des tartelettes pour la partager entre les deux personnes.

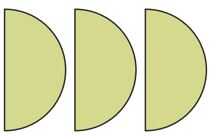
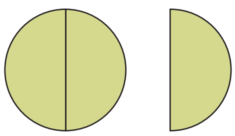
• Partage de chaque objet : chacune des tartelettes est partagée en deux.
Cette première approche se base sur une compréhension de la notion de moitié que l'on applique successivement à chaque objet.
Du point de vue de la représentation :



Résultat du partage :

 ou 

et

 ou 

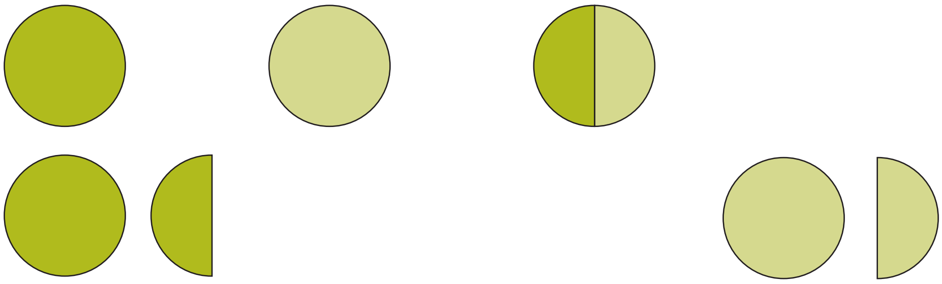
Retour au sommaire

Exprimé en langage courant, on obtient « trois demi-tartelettes » avec lesquelles on peut retrouver une tartelette et demie ou une tartelette et une moitié de tartelette. En écriture mathématique, la valeur d'une part, résultat du partage, est donc

$\frac{1}{2}\ T + \frac{1}{2}\ T + \frac{1}{2}\ T = \frac{3}{2}\ T$ qui se lit « trois demi-tartelettes » que l'on peut aussi écrire « en recomposant une tartelette » : $1\ T + \frac{1}{2}\ T$, qui peut aussi s'écrire $(1 + \frac{1}{2})\ T$

ainsi $3 \div 2 = \frac{3}{2}$ ou $3 \times \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \times 3$ ou $1 + \frac{1}{2}$. Les liens, les allers-retours, entre expression courante notamment orale et écriture mathématique sont importants. Ils permettent une meilleure compréhension de ces dernières.

• **Partage de la totalité des trois tartelettes entre les deux personnes.**
C'est le partage que l'expérience de la pratique incite ici à réaliser. Du point de vue de la représentation :
Résultat du partage :

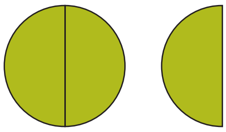


Exprimé en langage courant, on obtient une part d'une tartelette et demie ou une tartelette et une moitié de tartelette.
Mathématiquement, la valeur d'une part, résultat du partage du tout, est donc $1\ T + \frac{1}{2} T$.

$3 \div 2 = \frac{3}{2}$ soit $1 + \frac{1}{2}$

L'illustration donnée d'un partage de tartelettes peut aisément se décliner sur des segments (partage de longueurs), des surfaces (partages d'aires) ou encore avec des objets (plaque de chocolat, pomme…). La diversité de ces situations renforce la compréhension de la fraction.
Ces activités de partage peuvent se pratiquer dès le début du CM1 avec l'apprentissage du vocabulaire (demi, quart, tiers). Elles permettent d'appréhender le sens des fractions courantes et d'introduire déjà quelques premières écritures fractionnaires qui seront comprises de façon intuitive à partir de leur désignation orale et en référence à la vie de tous les jours :
$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{2}{3}$ …
C'est autour des deux approches (partage de chaque objet, partage de la totalité) que vont se constituer les situations concrètes de référence évoquées plus haut. Elles représentent des stratégies différentes qui procurent l'intérêt de mettre en évidence des relations du type : « Trois demi-tartelettes, c'est la même quantité qu'une tartelette et demie », « Si l'on a trois tartelettes à partager équitablement entre deux personnes, la part de chacun est une tartelette et demie » : $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

Prendre les $\frac{3}{2}$ « trois demis » de T :



Ici la fraction est un opérateur. Cette approche peut être qualifiée d'approche fonctionnelle, soulignée par l'utilisation de la préposition « de ». Elle est celle privilégiée dans le vocabulaire courant : une moitié de tartelette, deux tiers de litre, trois quarts d'heure etc.
Elle sera formalisée, dans le second degré, lors de l'étude des fonctions linéaires, pour notre exemple par :
$f(x) = a \times x$ avec $a = \frac{3}{2}$

À l'école élémentaire, on ne sait pas encore multiplier par une fraction, mais on peut expliquer ainsi l'écriture $\frac{3}{2}T$:

– soit on partage T en deux morceaux équitables puis on prend trois morceaux de ce type (la fonction « diviser par 2 » est suivie de la fonction « multiplier par 3 ») ;
– soit on prend trois fois T que l'on partage en deux morceaux équitables (la fonction « multiplier par 3 » est suivie de la fonction « diviser par 2 »).

Un disque partagé permet aussi de concrétiser les fractions $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ en liaison avec la lecture de l'heure. Des égalités particulières peuvent ainsi être écrites :
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

Les écritures usuelles de durée peuvent s'envisager sous l'angle fonctionnel (où il s'agit de prendre les a b ^{e} d'une grandeur). C'est ainsi que

$\frac{1}{4}$ h = $\frac{1}{4} \times 60$ min = 15 min ; $\frac{1}{2}$ h = $\frac{1}{2} \times 60$ min = 30 min ; $\frac{3}{4}$ h = $\frac{3}{4} \times 60$ min = 45 min.

Les fractions dans le contexte de codages de mesures

Pour une situation de mesure d'une grandeur continue, il faut se donner un étalon (unité de mesure). La mesure cherchée n'est pas toujours entière. C'est en général un nombre réel quelconque qui peut être approché à l'occasion d'une activité de mesurage. La résolution de ces problèmes de mesure a donné lieu à différents systèmes complexes basés sur des fractionnements d'unités (par exemple, pour les longueurs, le pouce douzième du pied sous l'Ancien Régime) avec une diversité territoriale et des difficultés de conversion et de calcul, sources de nombreuses erreurs. La volonté politique d'harmonisation lors de la Révolution française les a fait remplacer par une unité de référence unique et un seul fractionnement, le fractionnement décimal.

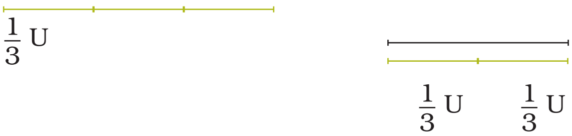
Retour au sommaire

Mesurer un segment de longueur S avec un segment unité de longueur U.

Pour des élèves de CM, les mesures par fractionnement de l'unité débuteront avec des fractions en demis ou en quarts supérieures et inférieures à l'unité.

• Mesurage par fractionnement de l'unité (aspect a b ^{e}) :

L'unité U est trop longue pour mesurer S, il faut donc la fractionner : le fractionnement en trois de U permet l'activité de mesurage.

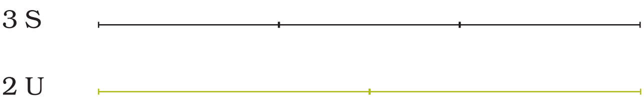


$S = \frac{1}{3}\,U + \frac{1}{3}\,U = \frac{2}{3}\,U$

U étant l'unité de longueur, la mesure de la longueur S est d'un tiers[3] U plus un tiers U soit deux tiers U. L'unité U étant choisie, la mesure du segment S est donc $\frac{2}{3}$ qui se lit « deux tiers ».

• Mesurage par commensuration[4] (aspect a : b)

Sans fractionner l'unité U, on cherche à faire coïncider un nombre entier de fois la longueur S avec un nombre entier de fois la longueur U.
Problématisée pour les élèves, la situation pourrait s'exprimer ainsi : « Une comparaison de bandes se fait par nombres entiers de bandes : on ne peut pas les découper. Combien de morceaux U faut-il pour obtenir un nombre entier de morceaux S ? ».



3S = 2U

Cette première étape permet d'exprimer une égalité entre S et U.
Sur le plan du raisonnement avec des élèves de CM :
– pour obtenir une longueur trois S, il faut deux longueurs U donc
– pour obtenir une longueur S, il faut deux longueurs U que l'on fractionne en trois morceaux de même longueur.
$S = 2\,U \div 3$

3. Dans le langage courant, l'expression orale utilisée est souvent un tiers de U privilégiant l'aspect fonctionnel de la notation. Elle peut être source d'erreurs.
4. La commensuration trouve aussi une illustration intéressante avec des engrenages. Combien de tours entiers d'une roue faut-il pour correspondre à un nombre de tours entiers d'une autre roue ? On exprime ainsi un rapport.

C'est aussi le tiers de la longueur deux U.

$S = \frac{1}{3} \times 2\ U = \frac{2}{3}\ U$

U étant l'unité de longueur, la mesure de la longueur S est $\frac{2}{3}$ qui peut se lire « 2 divisé par 3 ».
Cette approche, complémentaire de la précédente, enrichit la compréhension de la fraction.

Remarque : Les fractions supérieures à 1 (par exemple $\frac{3}{2}$), peuvent être appréhendées de la même façon par l'intermédiaire d'une situation de mesurage de la longueur d'un segment comme il est exposé plus haut.

Proportionnalité entre les mesures de longueur

À l'école primaire, la proportionnalité entre les mesures est une problématique importante en lien avec le système métrique. Il s'agit de préciser ici ce qui relève de l'enseignement en école élémentaire et de l'enseignement en collège.
Les programmes du cycle 3 précisent : « La proportionnalité est abordée à partir des situations faisant intervenir les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, d'agrandissement ou de réduction de figures. Pour cela, plusieurs procédures (en particulier celle dite de la "règle de trois") sont utilisées ».
À l'école, des situations-problèmes permettront de se lancer dans des recherches où le rapport entre deux mesures peut s'exprimer sous forme fractionnaire. Par exemple, une réduction de figures où on recherchera un coefficient correspondant à une fraction simple ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$...) pour le rapport entre des mesures de longueur ou encore l'exploration de systèmes de mesure anciens (rapports entre les unités que sont le pied, le pouce, la ligne).

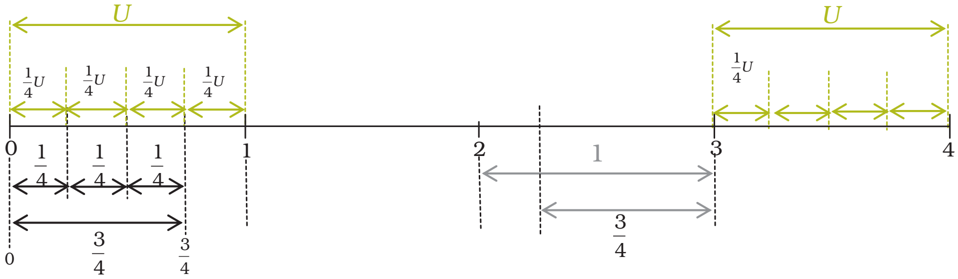
Les fractions en lien avec des graduations

Les activités pratiquées dans ce cadre sont indispensables car elles permettent de renforcer le statut de « nombres » des fractions et d'aborder les problèmes d'intercalation et de rangement qui sont primordiaux pour la compréhension des nombres décimaux et de leurs particularités (nombre décimal compris entre deux nombres entiers et nombre décimal compris entre deux nombres décimaux).
Sur une graduation fractionnaire, peuvent figurer à la fois le nombre-repère et le nombre-mesure : cela participe à une meilleure compréhension de deux fonctions du nombre (les nombres pouvant être des entiers naturels ou non)
Les deux approches décrites ci-dessous permettent de graduer une demi-droite. La première est privilégiée à l'école primaire. L'exploration des graduations utilisant les fractions simples, les traces individuelles et collectives qui en seront conservées, faciliteront la compréhension des fractions décimales.

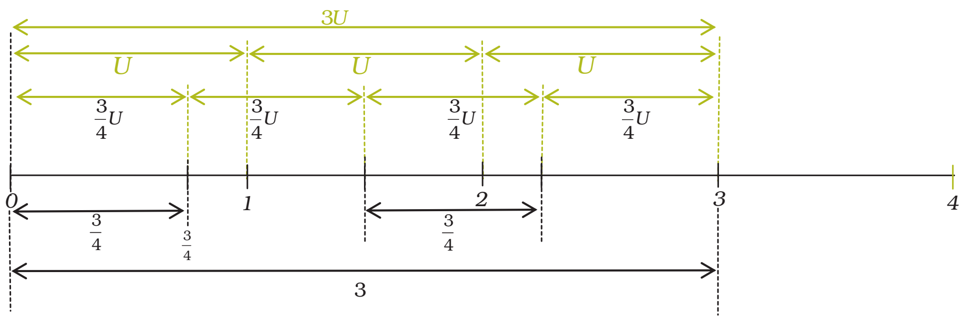
Retour au sommaire

Exemple pour la fraction $\frac{3}{4}$

• $\frac{3}{4}$ sous son aspect a b ^{e} (perçu comme trois quarts $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$)



• $\frac{3}{4}$ sous son aspect a ÷ b (perçu comme le quotient 3 ÷ 4)



Remarques :
– dans ces représentations, les longueurs figurent au-dessus du segment gradué et les repères et mesures qui sont des nombres sont positionnés au-dessous du segment ;

– la fraction $\frac{3}{4}$ désigne une graduation mais aussi des mesures de longueurs de segments. Des analogies seront faites avec les graduations en dixièmes et centièmes.

Le calcul avec des fractions

Les progressions indicatives qui accompagnent les programmes 2008 évoquent directement deux éléments qui se rapportent au calcul avec des fractions pour le CM2 : « Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur. »
Ils cadrent les attendus du point de vue de l'addition en mettant en relief l'importance de l'unité. L'addition de fractions simples n'est accessible aux élèves de CM2 qu'en référence à une situation concrète et des oralisations. Des acquis en termes de vocabulaire se construisent alors (tiers, quart…).

$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4}$ soit « trois quarts » plus « cinq quarts » égalent « huit quarts », soit deux.

Des calculs utilisant les quatre opérations sur des nombres exprimés sous forme fractionnaire relève du collège.
Pour autant, au cours moyen les élèves doivent acquérir, pour les fractions simples et dans des situations bien identifiées, des premiers repères pour l'addition, la soustraction et la multiplication en rapport avec des situations de référence.
Exemple pour des quarts :

$$1 = \frac{4}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

Ces premiers repères sur les fractions simples, validés par l'expérience et faisant appel à des connaissances sociales largement partagées, donneront lieu à des développements sur les fractions décimales et seront autant de points d'appui pour l'enseignement au collège.

Retour au sommaire

Partie 8

Les nombres décimaux

Bertrand Barilly et Gabriel Le Poche

Le point de vue mathématique

Les nombres décimaux, une utilisation et une écriture relativement récentes

Aujourd'hui l'usage des nombres décimaux pour le calcul ou l'expression de mesures paraît naturel, et leur intérêt ne fait pas débat. Toutefois, il n'en a pas toujours été ainsi.

L'écriture que nous utilisons en France et qui nous paraît « évidente » n'apparaît qu'après le XVIe siècle en Europe. Elle n'est d'ailleurs pas universelle puisque par exemple ce qui est « écriture à virgule »[1] en France se trouve être écriture codée avec un point dans les pays anglo-saxons, sur les calculatrices et machines électroniques.

Mais au-delà de l'écriture et du choix du symbole séparant la partie entière de la partie décimale, il est surtout important de noter que les nombres décimaux eux-mêmes sont apparus très récemment. C'est au Xe siècle que l'on en trouve une première évocation, dans un traité de mathématique arabe écrit par Ibrahim al Uqlidisi (920-980). Un peu plus tard, dans son ouvrage *Miftâh al-hisâb (La clé de l'arithmétique),* Jemshid ibn Massoud al Kashi (1380-1430) explique le maniement des fractions décimales. Mais en Europe il faudra attendre le XVIe siècle pour que Simon Stévin, mathématicien et ingénieur des digues, propose dans son ouvrage *La Disme* (1585) une notation destinée à faciliter les procédures de calcul en les ramenant à celles utilisées pour les entiers et qui pose les bases de notre notation actuelle.

C'est donc l'aspect pratique, facilitateur des calculs, qui amène à introduire l'écriture décimale des nombres non entiers, puis à la généraliser progressivement, en remplacement des différents systèmes de notation des mesures de grandeurs, non harmonisés sur le territoire et complexes.

L'invention du système métrique, qui assied les rapports entre unités de mesure d'une même grandeur sur le fractionnement décimal, contribuera à la diffusion des nombres décimaux et de leur écriture décimale.

Conçu dans une volonté d'universalisme par les plus grands scientifiques de la fin du XVIIIe siècle, le système métrique forme un ensemble stabilisé dès 1795 mais ce n'est qu'en 1837, après différentes tergiversations, compromis et abandons, qu'une loi (Loi relative aux poids et mesures du 4 juillet 1837) en rend l'usage obligatoire en France… Ainsi les conversions d'unités utiliseront désormais le fractionnement décimal de manière généralisée. Ce qui facilite les calculs et réduit les risques d'erreur.

1. L'appellation « nombre à virgule » relève d'un langage familier descriptif et n'a pas de sens mathématique. À l'école primaire, l'emploi, restreint, de l'expression « nombre(s) à virgule » marquera une représentation, une première appréhension par l'écriture, des nombres décimaux qu'il s'agira de faire évoluer. Le terme « écriture décimale d'un nombre » est lui tout à fait correct et désigne l'écriture d'un nombre à l'aide de chiffres arabes et d'une virgule ou d'un point.

Retour au sommaire

Le rappel de ces quelques éléments historiques doit nous inciter à une vigilance didactique particulière : bien que d'un usage « courant », les nombres décimaux sont le fruit d'une longue quête des mathématiciens. Même s'ils nous paraissent familiers, ils sont d'un abord difficile.
Il faudra donc expliciter très soigneusement aux élèves le fonctionnement des nombres décimaux et de leurs écritures, et donner beaucoup de temps pour la construction progressive des savoirs.
Il faudra aussi insister sur l'intérêt des nombres décimaux pour l'expression du résultat d'un mesurage, d'un calcul. Et montrer la cohérence d'un système abouti dont la graduation de la droite numérique présente une illustration adaptée pour les élèves d'élémentaire.

Un peu de vocabulaire et quelques propriétés

Vocabulaire

3,54 est l'écriture décimale du nombre $\frac{354}{100}$.

Et comme $\frac{354}{100} = \frac{177}{50}$, on peut aussi dire que 3,54 est l'écriture décimale du nombre $\frac{177}{50}$.

3 est la **partie entière** de 3,54 et 54 en est la **partie décimale.**
En mathématiques, un nombre décimal est un nombre rationnel particulier : c'est un nombre rationnel qui possède une écriture fractionnaire décimale ou encore un nombre rationnel qui possède une écriture décimale dont la partie décimale est finie. On peut montrer que ces deux conditions sont équivalentes.
Exemples :

$\frac{1}{2}$ est un nombre décimal car il peut aussi s'écrire $\frac{5}{10}$ (une fraction décimale) ou 0,5 (écriture décimale finie) ;

$\frac{22}{7}$ est un nombre rationnel non décimal car il ne possède pas d'écriture fractionnaire décimale ou car son écriture à virgule a une partie décimale infinie avec une périodicité des chiffres ; $\frac{22}{7} = 3{,}142857\mathbf{142857}142875\ldots$

Quelques propriétés de l'ensemble des nombres décimaux

Les nombres entiers naturels sont des nombres décimaux. Tous les nombres rationnels ne sont pas des nombres décimaux : par exemple, $\frac{22}{7}$ et $\frac{1}{3}$ ne sont pas des nombres décimaux.
Intercalation : entre deux nombres décimaux, il est toujours possible d'intercaler un autre nombre décimal.
Les nombres décimaux permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut un nombre réel quelconque : ainsi 3,142 est une valeur approchée au millième près par défaut de $\frac{22}{7}$ qui est un nombre rationnel non décimal, et au millième près par excès de π, qui est un nombre irrationnel.

Retour au sommaire

Les principaux obstacles pour les élèves

Une oralisation abusive

L'oralisation courante (« zéro virgule neuf », « zéro virgule onze », « zéro virgule cent trois ») tend à faire percevoir le nombre décimal comme une juxtaposition de deux entiers. Cette façon de lire le nombre ne rend pas compte de la valeur de la partie décimale et provoque des erreurs :

– erreurs de calcul : comment comprendre que « un virgule quatre-vingt-dix-neuf » plus « zéro virgule un » ne font pas « un virgule cent » ?

– erreur dans le classement : comme 103 > 11 > 9, certains élèves induisent 0,103 > 0,11 > 0,9

Une oralisation des écritures décimales mettant en évidence le fractionnement décimal peut limiter ce type d'erreur.

Ainsi 2,54 sera lu « deux et cinq dixièmes et quatre centièmes » ou « deux unités cinq dixièmes et quatre centièmes » en liaison avec l'égalité $2{,}54 = 2 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100}$ ou « deux unités et 54 centièmes » en liaison avec l'égalité $2{,}54 = 2 + \frac{54}{100}$.

Avec cette lecture, 1,99 + 0,1 c'est 1 unité 9 dixièmes et 9 centièmes plus 1 dixième, ce qui fait 1 unité, 10 dixièmes et 1 centième, soit 2 unités et 9 centièmes.

Certains critères de comparaison valables pour les nombres entiers ne sont plus valables pour les nombres décimaux

Le nombre de chiffres, et donc la longueur de l'écriture, n'est plus un critère pertinent pour le rangement des nombres décimaux alors qu'il l'était pour les nombres entiers, seuls nombres étudiés à l'école jusqu'en CE2. Ordonner commençait alors par un classement en catégories de nombres possédant un même nombre de chiffres.

L'intérêt de travailler tôt l'observation et la mise en mots des fonctionnements spécifiques de la numération orale et de la numération écrite s'en trouve renforcé, comme celui de fonder les règles de comparaison puis de calcul avec des nombres décimaux sur les propriétés des écritures fractionnaires associées, écrites ou oralisées.

Ainsi : 12,28 > 12,131

car $\frac{12\,280}{1\,000}$ est supérieur $\frac{12\,131}{1\,000}$ ou encore

car 2 dixièmes et 8 centièmes est plus grand que 1 dixième 3 centièmes et 1 millième, ou encore

car $12 + \frac{280}{1\,000}$ est supérieur à $12 + \frac{131}{1\,000}$, etc.

Entre deux nombres décimaux, il y a toujours la possibilité d'en placer un troisième : l'intercalation est toujours possible

Les notions de nombres consécutifs, de successeur ou de prédécesseur n'existent que pour les entiers (le nombre juste avant…, juste après…). Cela n'est pas évident pour les élèves, dont certains pensent, par exemple, qu'il n'y a pas de nombre entre 3,4 et 3,5 et que 3,5 est le successeur de 3,4.

Retour au sommaire

Une oralisation correcte (entre trois unités et 4 dixièmes et trois unités et 5 dixièmes il y a trois unités, 4 dixièmes et 1 centième…), le passage par des écritures fractionnaires, et surtout le recours à la droite graduée peuvent aider à dépasser cet obstacle. C'est un premier pas qui amènera à considérer qu'il y a « une infinité » de nombres entre deux nombres, une autre découverte après celle de l'infinité des nombres entiers.

La comparaison de deux nombres décimaux fait en général intervenir des stratégies différentes pour les parties entières et décimales

Il n'y a qu'un seul ordre sur les nombres. Mais dans la pratique on utilise pour comparer deux nombres décimaux deux stratégies bien différentes pour la partie entière et pour la partie décimale :
– pour la partie entière, on décide en fonction de critères tels que le nombre de chiffres ou bien s'il y a le même nombre de chiffres on compare les chiffres à partir de celui le plus à gauche : les élèves de CM1 connaissent déjà cette façon de faire même s'il leur faut encore pour l'appliquer apprendre à repérer la partie entière ;
– pour la partie décimale on compare chiffre par chiffre à partir du chiffre le plus près de la virgule selon un procédé qui s'apparente à l'ordre lexicographique, analogue à celui des dictionnaires. C'est proche de la stratégie utilisée pour les nombres entiers lorsque ceux-ci ont le même nombre de chiffres, mais pour la partie décimale on ne s'intéresse pas au nombre de chiffres et la technique de « l'ordre lexicographique » s'impose d'ailleurs tout particulièrement lorsque les parties décimales sont de longueurs différentes.
Exemples de comparaison : 2,54 et 3,7 puis 3,54 et 3,7
On peut procéder :
– pour le premier couple, par comparaison des parties entières en exprimant que 3 est supérieur à 2 et que donc 3,7 est supérieur à 2,54.

- *Cela implique avoir compris la fonction de la virgule séparant la partie entière et la partie décimale, l'importance relative de ces parties, et qu'une comparaison de nombres décimaux ne se base pas sur le nombre de chiffres.*
- *Le recours à une droite graduée collective et/ou individuelle permet de visualiser les comparaisons.*

– par recours à des écritures fractionnaires décimales de même dénominateur, ce qui permet de se ramener à une comparaison de nombres entiers

$$3{,}7 = 3{,}70 = \frac{370}{100} \text{ et } 3{,}54 = \frac{354}{100} \text{ or } 370 > 354 \text{ donc } \frac{370}{100} > \frac{354}{100} \text{ et } 3{,}7 > 3{,}54.$$

- *Cette mise au même format à droite nécessite que les élèves aient acquis une certaine aisance dans les transformations d'écritures (écriture décimale/écriture fractionnaire). Elle permet de n'utiliser ensuite que les compétences acquises pour l'ordre des nombres entiers. Mais elle ne doit pas être la seule méthode présentée pour les comparaisons : en effet, si elle constitue un avantage procédural immédiat elle ne renforce pas la compréhension de la signification de chacun des chiffres constituant la partie décimale.*

– par le retour à la compréhension de ce que sont les unités et les fractions décimales

- 2,54 et 3,7. Il s'agit ici de ramener à une comparaison menée grâce au positionnement relatif par rapport à un nombre entier (2,54 est inférieur à 3 car 54 centièmes est inférieur à 1 et 3,7 est supérieur à 3 donc 2,54 < 3,7.)

Retour au sommaire

• L'emploi de formes associant les écritures littérales et chiffrées peut être une aide utile à ce niveau de la scolarité : 2 unités 5 dixièmes et 4 centièmes.
• 3,54 et 3,7. 3,54 c'est 3 et 5 dixièmes et 4 centièmes. 3,7 c'est 3 et 7 dixièmes. Les parties entières étant identiques, la comparaison porte sur les parties décimales. 5 dixièmes étant inférieur à 7 dixièmes alors 3,54 inférieur à 3,7.
• Cette comparaison sur les ordres successifs renforce la signification des écritures décimales et rentre en résonance avec les graduations issues du fractionnement.
• Une comparaison basée sur l'expression en centièmes (54 centièmes/70 centièmes) est correcte mais comporte le risque de renforcer les confusions de l'oral puisqu'on y retrouve l'ordre sur les entiers.

De la fraction décimale à l'écriture décimale des nombres

Les programmes

Les nombres décimaux ont été introduits dans des contextes de partages et de mesures avec, comme premières désignations, les fractions décimales qui permettent d'assurer, grâce à la nouveauté du codage, l'existence de nouveaux nombres, différents des entiers. C'est le sens premier auquel il convient de revenir pour assurer la compréhension et donner du sens aux techniques opératoires prévues par les programmes à travers la fréquentation d'exemples variés dans des contextes différents.
Les connaissances acquises dans le domaine des fractions simples sont transférables dans celui des fractions décimales.
Pour introduire les nombres décimaux, l'écriture fractionnaire est à privilégier. Elle présente d'abord le nombre décimal comme un nombre, un nouveau nombre, alors que l'écriture décimale introduite en lien avec les mesures pourrait n'apparaître que comme le résultat d'un simple recodage entraîné par un changement d'unité comme 234 c = 2,34 €.
Par ailleurs, si cette écriture avec le choix d'une nouvelle unité fonctionne pour certaines mesures (longueur, prix, contenances en litres), ce recodage s'avère plus délicat pour les aires et les volumes et n'est plus opérant pour la mesure du temps, du fait du fractionnement sexagésimal de l'heure, de la minute.

Progressions indicatives des apprentissages

Seules les connaissances et compétences nouvelles sont mentionnées dans chaque colonne. Pour chaque niveau les connaissances et compétences acquises dans les classes antérieures sont à consolider. La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages.

Retour au sommaire

	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Nombres et calcul	**Fractions** Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. Utiliser, ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.	**Fractions** Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Ajouter 2 fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.
	Nombres décimaux Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100e) Savoir : - les repérer, les placer sur une droite graduée, - les comparer, les ranger, - les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, - passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.	**Nombres décimaux** Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000e) Savoir : - les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, - les comparer, les ranger, - produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001... Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.
	Calcul **Calculer mentalement** Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. Calculer mentalement un ordre de grandeur du résultat.	**Calcul** **Calculer mentalement** Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.
	Effectuer un calcul posé Addition et soustraction de deux nombres décimaux. Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. Division euclidienne de deux entiers. Division décimale de deux entiers Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. **Problèmes** Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.	**Effectuer un calcul posé** Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. Division d'un nombre décimal par un nombre entier. Utiliser sa calculatrice à bon escient. **Problèmes** Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

Les compétences à acquérir et qui concernent les nombres décimaux sont nombreuses dès le CM1. Elles s'appuient sur les savoirs et savoir-faire des élèves concernant les fractions courantes et décimales. Ceux-ci doivent être assurés, fréquemment repris et confortés parce qu'ils en construisent le sens. Il ne s'agit bien sûr ni de viser ni d'attendre une totale maîtrise des fractions avant d'aborder les nombres décimaux mais d'assurer la compréhension de ce qu'ils sont, des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de dix. Pour cela, la lecture et l'interprétation des écritures fractionnaires décimales ainsi que les comparaisons, additions et soustractions des nombres écrits sous forme d'écritures fractionnaires décimales doivent être bien maîtrisées.

Retour au sommaire

Avec la connaissance de ces nouveaux nombres, le calcul (mental, posé et aussi instrumenté) constitue un enjeu important pour les nombres décimaux en CM. La résolution de problèmes est un support pour les apprentissages et aussi un enjeu des apprentissages, comme pour l'ensemble du programme de mathématiques.
Cette partie du programme de mathématiques comporte des temps identifiés de découverte, d'apprentissage, d'entraînement, et de réinvestissement. Elle doit aussi faire l'objet d'un travail croisé avec les autres champs des mathématiques (grandeurs et mesures, organisation et gestion de données) mais aussi avec d'autres disciplines : histoire, sciences expérimentales et technologie, géographie… avec la multitude d'opportunités que présentent ces domaines de donner du sens à ces nombres et aux calculs qui s'y rapportent.

Connaître les nombres décimaux, quelques exemples d'activités pour les élèves

Compétence CM1 : « passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement »

• En utilisant le fait que le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ peut être vu comme « a divisé par b »

Ce passage est alors assuré en utilisant la touche division de la calculette pour transformer les écritures $\frac{1}{10}$ « un dixième » en 0,1 ; $\frac{1}{100}$ « un centième » en 0,01 ; $\frac{1}{1000}$ « un millième » en 0,001 et $\frac{\overline{\text{mcdu}}}{1000}$ en $\overline{\text{m,cdu}}$ (le point remplace alors la virgule).

• En utilisant le fait que le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ peut être vu comme « a b^{e} »
La décomposition canonique, en lien avec un tableau de numération, permet ensuite de mieux comprendre le nouveau codage.

Exemple 1 :

$\frac{6\,537}{1\,000} = 6 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1000}$ et ainsi $\frac{6\,537}{1\,000} = 6{,}537$

$\frac{6\,537}{1\,000}$ « 6 537 millièmes » s'écrit dans le tableau, par analogie avec l'écriture des nombres entiers, en écrivant un chiffre par colonne en commençant par le chiffre de droite dans la colonne des millièmes : c'est donc aussi « 6 unités, 5 dixièmes, 3 centièmes, 7 millièmes » qui s'écrit 6,537.

Exemple 2 :

$\frac{8\,931}{100} = 89 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100}$ et $\frac{8\,931}{100} = 89{,}31$

Avec les lectures possibles de « 8 931 centièmes » comme « 89 unités (ou 8 dizaines, 9 unités), 3 dixièmes, 1 centième » mais aussi « 893 dixièmes, 1 centième », « 8 dizaines, 93 dixièmes, 1 centième », etc. pour l'une ou l'autre des écritures (écriture fractionnaire décimale ou écriture décimale).

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$
Centaine	Dizaines	Unités ,	dixièmes	centièmes	millièmes
		6	5	3	7
	8	9	3	1	
	5	4	6		
		5	4	6	

Exemple 3 :

Des exemples tels que $\frac{546}{10} = 54 + \frac{6}{10} = 54{,}6$ $\quad \frac{546}{100} = 5 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} = 5{,}46$

permettent d'avoir **une première approche** du fait que **la division par 10 d'un nombre décimal** (ici le nombre décimal 546) provoque **un décalage du nombre vers la droite** dans le tableau de numération, ce qu'un langage courant traduit improprement par un **décalage de la virgule vers la gauche**.

La décomposition usuelle $5{,}46 = 5 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} = 5 + (4 \text{ x } \frac{1}{10}) + (6 \times \frac{1}{100})$ permet

d'écrire $5{,}46 = 5 + (4 \text{ x } 0{,}1) + (6 \text{ x } 0{,}01)$ ou $5{,}46 = 5 + 0{,}4 + 0{,}06$

La décomposition usuelle $5{,}46 = 5 + \frac{46}{100} = 5 + (46 \times \frac{1}{100})$ permet d'écrire

$5{,}46 = 5 + (46 \times 0{,}01)$ ou $5{,}46 = 5 + 0{,}46$

De même la décomposition non usuelle $5{,}46 = (54 \times \frac{1}{10}) + (6 \times \frac{1}{100})$ « 54 dixièmes,

6 centièmes » permet d'écrire $5{,}46 = (54 \times 0{,}1) + (6 \times 0{,}01)$ ou $5{,}46 = 5{,}4 + 0{,}06$

Les décompositions additives usuelles des nombres décimaux (somme de fractions décimales ou somme d'une partie entière et d'une partie décimale éventuellement décomposée) sont à systématiser.

• Écrire un même nombre sous différentes formes
Complète les égalités en utilisant des fractions décimales.

1,5 = 1,07 =

Complète les égalités en écrivant les nombres sous leur forme décimale (chiffres et virgule).

$1 + \frac{7}{10} =$ $\quad \frac{2}{4} =$

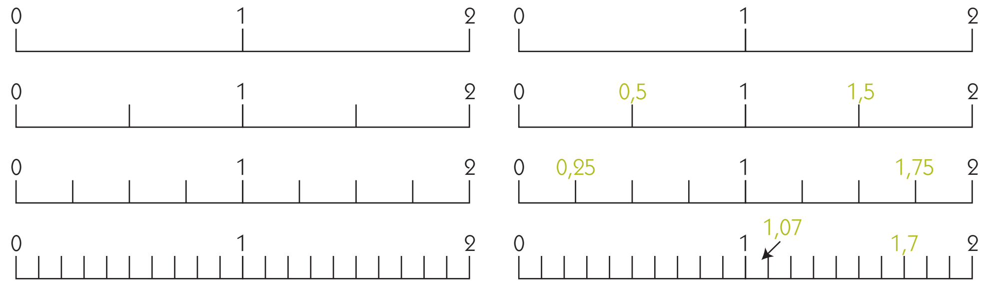
Cette pratique s'appuie sur les formes écrites évoquées plus haut mais aussi et d'abord sur des formes oralisées : « un virgule cinq » c'est « une unité et cinq dixièmes ». Il y a là des connaissances et même des automatismes à installer progressivement, en considérant que certains élèves auront sans doute besoin de davantage de temps d'entraînement, d'allers/retours avec des supports concrets s'appuyant sur le sens (graduations, écarts).

Retour au sommaire

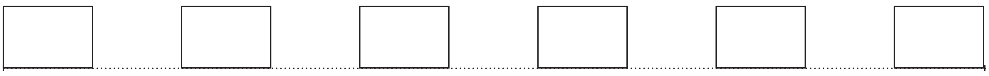
Compétence CM1 se rapportant aux nombres décimaux : « les placer, les ranger sur une droite graduée » ; « les comparer, les ranger ; les encadrer par deux entiers consécutifs ».

Un exercice de réinvestissement peut être le suivant :
Indique, par une flèche, la position de chacun des nombres suivants sur la graduation.
Explique ton choix pour 1,07.

1,5 ; 0,5 ; 0,25 ; 1,75 ; 1,7 ; 1,07



Range maintenant ces nombres dans l'ordre croissant.
1,5 ; 0,5 ; 0,25 ; 1,75 ; 1,7 ; 1,07



En cours d'apprentissage, il est nécessaire de recourir à différentes écritures :

$1{,}5 = 1 + \frac{5}{10} = \frac{15}{10}$ et $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; 1,5 « un et cinq dixièmes » c'est aussi « un et un demi ».

On peut choisir différents fractionnements de l'unité pour graduer la demi-droite et ce choix répond à un besoin. Il s'agit d'amener les élèves à le percevoir comme dans l'exercice précédent.
De ce point de vue, les erreurs sur le rangement de 1,7 et 1,07 ou encore de 0,5 et 0,25 sont révélatrices d'une intégration insuffisante de ce que représente chacun des chiffres de la partie décimale (dixième, centième) et de défaillances dans la comparaison de nombres (il faut à nouveau répéter que l'oralisation courante : « cinq », « vingt-cinq » des parties décimales de 0,5 et 0,25 entraîne ce type d'erreurs. On privilégiera donc une oralisation explicite « zéro unité et cinq dixièmes »).
Le placement du nombre 1,07 entre deux graduations met l'accent sur une caractéristique de l'ensemble de ces nouveaux nombres : il y a toujours des nombres entre deux nombres décimaux : entre 8,5 et 8,6 ; entre 8,57 et 8,58 ; entre 8,574 et 8,575…

Cette compétence sur le rangement est liée à la compréhension de la signification des chiffres dans l'écriture des nombres décimaux. Son acquisition marque une étape importante qu'il est nécessaire que chaque élève franchisse.
Réactiver, sur les entiers, les notions de nombre et de chiffre, en s'appuyant sur le tableau de numération des nombres entiers, par exemple, constitue une aide préventive pour les élèves. Des temps d'aide personnalisée avant d'aborder les nombres décimaux sont indispensables pour les élèves dont les compétences sur les nombres entiers ne sont pas encore très solides.

Retour au sommaire

Retrouver des écritures égales (ex : 12,3 ; 12,30 ; 12+3/10 ; 10+2+3/10 ; 123/10…) parmi d'autres écritures ; rechercher une diversité d'écritures d'un même nombre ; poursuivre les exercices d'identification du chiffre représentant les dixièmes… ; positionner sur une droite graduée en dixièmes… aide les élèves à s'approprier ces écritures et à fixer des repères.

L'encadrement de nombres décimaux, entre deux nombres entiers consécutifs, au dixième, au centième, permet de mieux comprendre la structuration de la droite graduée. Cette activité peut se pratiquer sur différentes écritures à l'aide de différentes formulations orales.

$1 < 1{,}053 < 2$ $\quad \frac{1\,053}{1\,000} = 1 + \frac{53}{1\,000}$ « une unité et cinquante-trois millièmes » avec 53 millièmes inférieur à 1

$1{,}0 < 1{,}053 < 1{,}1$ $\quad \frac{1\,053}{1\,000} = 1 + \frac{53}{1\,000}$ avec 53 millièmes inférieur à 1 dixième (100 millièmes)

$1{,}05 < 1{,}053 < 1{,}06$ $\quad \frac{1\,053}{1\,000} = 1 + \frac{5}{100} + \frac{3}{1\,000}$ « une unité et cinq centièmes et trois millièmes » avec 3 millièmes inférieur à 1 centième (10 millièmes)

Calculer avec des nombres décimaux : sens et technique

Le calcul mental

Les repères pour l'organisation de la progressivité des apprentissages comportent deux items pour le calcul mental en CM2 : « Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. »

Consolider les connaissances en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux

– Revisiter les tables de multiplication avec les nombres décimaux (exemple : 0,8 × 7) est une activité intéressante à ce niveau de la scolarité à plus d'un titre. Cela permet, tout à la fois, de réinvestir des connaissances qu'il est toujours nécessaire de consolider mais aussi de renforcer le sens des nombres décimaux. Pour l'exemple évoqué, une oralisation explicite aide à la compréhension et à la mémorisation : « zéro virgule huit multiplié par sept », c'est « huit dixièmes multiplié par sept », le résultat en est « cinquante-six dixièmes ». « Cinquante-six dixièmes », c'est « cinq unités et six dixièmes » que l'on écrit 5,6.
Remarques : le temps court d'une séance de ce type peut débuter par la recherche de situations auxquelles de telles écritures peuvent se rapporter. Multiplications, additions et soustractions de nombres décimaux feront l'objet de temps de recherche systématique de l'ordre de grandeur d'un résultat. La calculatrice apporte ici un moyen de contrôle dont l'utilisation est justifiée.
– Le complément à l'unité suivante est un prolongement des pratiques précédentes sur les compléments à la dizaine, à la centaine, avec les nombres entiers et s'appuie sur les formulations évoquées plus haut. Il renvoie à des activités avec les fractions

Retour au sommaire

usuelles et à des pratiques sociales qui deviennent cependant moins courantes telles que faire l'appoint, rendre la monnaie.

Diviser ou multiplier un nombre décimal par 10, 100 ou 1 000

La multiplication ou division par une puissance de dix peut être justifiée de différentes façons mais il y a lieu de connaître la règle de déplacement de la virgule. Dans tous les cas, la compréhension du mécanisme s'acquiert en se ramenant aux fractions décimales.
– Justification utilisant l'aspect « *a b* ᵉ » de la notation fractionnaire et le tableau de numération
Elles relèvent de l'approche privilégiée à l'école primaire.

100 000	10 000	1 000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Centaines de milliers	Dizaines de milliers	Unités de milliers	Centaine	Dizaines	Unités ,	Dixièmes	Centièmes	Millièmes
			1	3	4	6	5	
	1	3	4	6	5			
1	3	4	6	5	0			
				1	3	4	6	5

$134{,}65 = \frac{13\,465}{100} = 134 + \frac{6}{10} + \frac{5}{100}$; c'est 134 unités, 6 dixièmes et 5 centièmes.

• en multipliant par 100, l'on obtient : **134 centaines** et 600 dixièmes (soit **6 dizaines** car 100 dixièmes c'est 10) et 500 centièmes (soit **5 unités** car 100 centièmes c'est 1) soit le nombre 13 465 ;
• en multipliant par 100, les chiffres ont changé de valeur : le chiffre des centièmes est devenu chiffre des unités, le chiffre des dixièmes celui des dizaines, etc.
$134{,}65 \times 100 = 13\,465$;
• en multipliant par 1 000, l'on obtient : **134 milliers** et 6 000 dixièmes (soit **6 centaines** car 1 000 dixièmes c'est 100) et 5 000 centièmes (soit **5 dizaines** car 1 000 centièmes c'est 10) soit le nombre 134 650. $134{,}65 \times 1\,000 = 134\,650$;
• en divisant par 10, 134 unités (soit 1 340 dixièmes) et 6 dixièmes (soit 60 centièmes) et 5 centièmes (soit 50 millièmes) l'on obtient : 134 dixièmes (**13 unités et 4 dixièmes) et 6 centièmes et 5 millièmes**. soit le nombre 13,465 ;
• en divisant par 10, les chiffres ont changé de valeur : le chiffre des centièmes est devenu chiffre des millièmes, le chiffre des dixièmes celui des centièmes etc.
$134{,}65 \div 10 = 13{,}465$.

Des techniques opératoires (calculs posés en colonnes) aisément transférables

Comme c'était le cas pour les nombres entiers, l'apprentissage des techniques opératoires sur les nombres décimaux ne peut se faire sans que se contruise parallèlement le sens des opérations.
Pour que les algorithmes s'installent sûrement et durablement, l'acquisition des techniques nécessite des temps d'entraînement spécifiques, distincts des temps de calcul mental.

Retour au sommaire

Ce qui est visé c'est la maîtrise des opérations sur les nombres de taille « raisonnable » sans recherche d'une virtuosité hors de propos. Dans ce domaine particulièrement, les habiletés des élèves peuvent être variables au sein du groupe et une différenciation est souhaitable.

Addition et soustraction des nombres décimaux

Elles prolongent naturellement les techniques[2], choisies par l'équipe d'école, stabilisées au cycle 2 dans l'ensemble des nombres entiers. Il n'y a pas lieu d'en changer. Les réactiver et les oraliser avec les nombres décimaux redonne sens au fractionnement décimal, à la retenue (« quatre dixièmes et huit dixièmes font douze dixièmes ») et aux décompositions (« un dixième, c'est dix centièmes… »).
Le sens de ces opérations s'inscrit dans une continuité sur les nombres entiers. Explorer des situations qui amènent à constater l'insuffisance du seul recours aux nombres entiers reste pour autant nécessaire : précision d'une mesure pour le calcul d'un périmètre, limites du découpage en unités pour l'addition d'aires, différences de volumes…

Des points de vigilance

– le placement des nombres (l'alignement des chiffres par la droite, repère construit pour les entiers, n'est plus valide avec les nombres décimaux) ;
– le traitement des parties décimales (il s'agit bien de considérer le nombre décimal comme un nombre dont on ne peut traiter les parties entières et décimales séparément comme deux nombres entiers de chaque côté la virgule).

Volontairement, les exemples choisis ici pour les techniques opératoires ne permettent pas d'utiliser facilement des procédures mentales sans support écrit.
Néanmoins, il peut être intéressant d'essayer deux procédures pour un même calcul pour les trois principales raisons suivantes : vérifier que l'on obtient bien le même résultat (qui est indépendant de la technique), mieux comprendre comment fonctionne une procédure (les mises en parallèle sont fructueuses), en tester les efficiences relatives en fonction de la situation.

Les techniques opératoires se prolongent facilement en s'aidant, dans un premier temps, des tableaux de numération prolongés aux nombres décimaux.
Remarque : les calculs posés en colonnes illustrent les techniques et ne sont pas des exemples à utiliser obligatoirement en classe.

Exemples : additions 246,56 + 57,8 et 4,967 + 8,76 + 32,6

Technique anglo-saxonne de droite à gauche

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
centaine	dizaines	unités ,	dixièmes	centièmes
2 +	4 5	6 7	5 8	6
$\cancel{1}$3	$\cancel{1}$0	$\cancel{1}$4	3	6

Technique française

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
centaine 1	dizaines 1	unités , 1	dixièmes	centièmes
2 +	4 5	6 7	5 8	6 **0**
3	0	4	3	6

2. Rappel des techniques présentées dans *Le Nombre au cycle 2,* (pages 46 et 47) : par exemple, technique anglo-saxonne de droite à gauche ou technique traditionnelle française.

Retour au sommaire

10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
dizaines	unités ,	dixièmes	centièmes	millièmes
	4	9	6	7
+	8	7	6	0
+ 3	2	6	0	0
1 4	~~2~~ 6	~~1~~ 3	2	7

10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
dizaines 1	unités , 2	dixièmes 1	centièmes	millièmes
	4	9	6	7
+	8	7	6	
+ 3	2	6		
4	6	3	2	7

Les techniques prennent du sens grâce aux égalités de type : 10 millièmes c'est 1 centième, 10 centièmes c'est 1 dixième, 10 dixièmes c'est 1 unité qui permettent de changer de colonnes dans le tableau de numération.
Remarque : les chiffres en gris constituent une mise au même format à droite mais ne sont pas indispensables à la compréhension des techniques.

Exemples : soustractions 238,43 – 147,367 et 145,3 – 7,658

Technique anglo-saxonne de droite à gauche

Dans cette technique, 2 centaines 3 dizaines 8 unités 4 dixièmes 3 centièmes sont transformées en 1 centaine 13 dizaines 8 unités 3 dixièmes 12 centièmes 10 millièmes, de proche en proche et de droite à gauche, pour permettre d'effectuer les retraits successifs.

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
centaine	dizaines	unités ,	dixièmes	centièmes	millièmes
1 ~~2~~	13 ~~3~~	8	3 ~~4~~	~~12~~ 3	10
– 1	4	7	3	6	7
0	9	1	0	6	3

1 centaine 4 dizaines 5 unités 3 dixièmes c'est aussi 1 centaine 3 dizaines 15 unités (car 1 dizaine c'est 10 unités) 2 dixièmes 9 centièmes 10 millièmes (car 1 dixième c'est 10 centièmes mais c'est aussi 9 centièmes et 10 millièmes).

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
centaine	dizaines	unités ,	dixièmes	centièmes	millièmes
1	3 ~~4~~	1 5	2 ~~3~~	~~10~~ 9	10
–		7	6	5	8
1	3	7	6	4	2

Technique française

Cette technique utilise des retenues usuelles qui figurent dans les calculs, elle est basée sur la propriété suivante : on ne change pas la valeur d'une différence en ajoutant un même nombre aux deux termes de la différence. Elle est plus difficile à comprendre :

238,43 -147,367

(238,43 + 10 millièmes + 10 centièmes + 10 dixièmes) – (147,367 + 1 centième + 1 dixième + 1 centième)

Car 10 millièmes c'est 1 centième et 1 dixième c'est 10 centièmes et 10 dixièmes c'est 1 centième

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
centaine	dizaines	unités ,	dixièmes	centièmes	millièmes
2	1 3	8	4	1 3	1 0
– 1	4	7	3	6	7
1			1	1	
0	9	1	0	6	3

145,3 -7,658

(145,3 + 10 millièmes + 10 centièmes +10 dixièmes + 10 unités) – (7,658 + 1 centième + 1 dixième + 1 unité + 1 dixième)

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
centaine	dizaines	unités ,	dixièmes	centièmes	Millièmes
1	4	1 5	1 3	1 0	1 0
–		7	6	5	8
	1	1	1	1	
1	3	7	6	4	2

Retour au sommaire

Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier

Le calcul revient toujours à un calcul sur des nombres entiers.
Exemple : le calcul de 31 × 2,75.
Le résultat de la multiplication des nombres entiers une fois obtenu, il reste à le diviser par 100 pour compenser la multiplication par 100 qui a transformé le facteur 2,75 en facteur 275.
La technique opératoire de la multiplication dans les entiers (calculs posés en colonnes) se prolonge en replaçant la virgule à la fin dans les calculs.

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & 2, & 7 & 5 & \\
\times & & 3 & 1 & \\
\hline
 & 2 & 7 & 5 & \quad 1 \times 275 \\
8 & 2 & 5 & 0 & \quad 30 \times 275 \\
\hline
8 & 5, & 2 & 5 &
\end{array}
$$

Autres exemples : les calculs de 34,7 × 7 et de 23 × 6,89
Explications basées sur l'aspect « $a \div b$ »
Dans l'écriture qui suit, C est le chiffre des centaines, D le chiffre des dizaines, U le chiffre des unités, d le chiffre des dixièmes, c le chiffre des centièmes et m le chiffre des millièmes. $\text{CDU}, dcm \times n = \dfrac{\text{CDU}dcm}{1\,000} \times n = \dfrac{\text{CDU}dcm \times n}{1\,000}$

La multiplication de deux entiers est connue. Le résultat est un nombre de millièmes que l'on exprime sous forme d'un nombre décimal.

Ainsi $34{,}6 \times 7 = \dfrac{346}{10} \times 7 = \dfrac{346 \times 7}{10} = \dfrac{2\,422}{10} = 242{,}2$

$23 \times 6{,}89 = 23 \times \dfrac{689}{100} = \dfrac{23 \times 689}{100} = \dfrac{15\,847}{100} = 158{,}47$

Ces égalités justifient la technique opératoire usuelle.
Pour le calcul de 34,6 × 7, le premier facteur 34,6 peut se transformer en 346 dixièmes et l'on se ramène donc à un calcul d'un produit de deux entiers pour lequel on connaît une technique opératoire. Le résultat, nombre entier de dixièmes, est recodé sous forme d'un nombre décimal par une écriture avec une virgule.

De la même façon pour le calcul de 23 × 6,89 le second facteur peut se transformer en 689 centièmes et l'on se ramène donc à un calcul d'un nombre entier de centièmes (23 × 689). Le résultat, 15 847 centièmes, est codé par une écriture à virgule du nombre décimal 15,847.

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & & & \text{dixièmes} & \\
 & 3 & 4, & 6 & \\
\times & & & 7 & \\
\hline
2 & 4 & 2, & 2 & \quad 346 \times 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrl}
 & & & \text{centièmes} & & \\
 & & 6, & 8 & 9 & \\
\times & & & 2 & 3 & \\
\hline
 & 2 & 0 & 6 & 7 & \quad 3 \times 689 \\
1 & 3 & 7 & 8 & 0 & \quad 20 \times 689 \\
\hline
1 & 5 & 8, & 4 & 7 &
\end{array}
$$

La multiplication de deux nombres décimaux, un point plus délicat

La question du sens est ici beaucoup plus délicate car il est impossible de faire appel, comme pour la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier, à l'addition itérée. Néanmoins deux pistes sont possibles : la première s'appuie sur des transformations d'écritures et prend sa légitimité dans le sens de l'écriture

Retour au sommaire

décimale indépendamment de tout contexte, la seconde consiste en l'utilisation de la multiplication des nombres décimaux dans des contextes particuliers, situations de référence pour les élèves.

Transformation d'écritures pour le calcul de 2,5 × 3,4

Les équivalences d'écriture permettent de se ramener aux cas précédents :

2,5 × 3,4 c'est $\frac{25}{10} \times \frac{34}{10}$ soit encore $(25 \times \frac{1}{10}) \times (34 \times \frac{1}{10}) = 25 \times \frac{1}{10} \times 34 \times \frac{1}{10} =$ $25 \times 34 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = (25 \times 34) \times (\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}) = 850 \times \frac{1}{100} = 8{,}50$

Utilisation des contextes

La multiplication des nombres décimaux est utilisée usuellement dans les différents contextes suivants :
– le calcul d'un prix[3] lorsque l'on connaît le prix par masse unité (exprimé en €/kg euros par kilogramme) et la masse achetée (exprimée en kg).
Les grandeurs en jeu sont alors une grandeur quotient[4] (prix par masse) et une grandeur simple (la masse).
Ainsi si 23,6 € est le prix au kilo d'une denrée et 4,59 kg la masse achetée alors le prix à payer est donné par le produit de 23,6 (€/kg) × 4,59 (kg) = 108,324 (€) soit un prix arrondi au centime près de 108,32 € ;
– le calcul d'une aire d'un rectangle dont les dimensions exprimées en unité u sont respectivement 23,6 u pour la longueur et 4,59 u pour la largeur. Les grandeurs en jeu sont alors une grandeur simple et une grandeur produit[5] (le produit d'une longueur par une longueur qui est une aire).
23,6 (u) × 4,59 (u) = 108,324 (u^2) ;
– le calcul d'une aire d'un rectangle dont les dimensions exprimées en mètres[6] sont respectivement 23,6 m pour la longueur et 4,59 m pour la largeur.
Les grandeurs en jeu sont alors une grandeur simple et une grandeur produit (le produit d'une longueur par une longueur qui est une aire).
23,6 (m) × 4,59 (m) = 108,324 (m^2) ;
– le calcul d'un volume (seule, la formule du volume du pavé droit est au programme de l'école et cette activité s'inscrit dans une initiation à l'utilisation d'unités métriques de volume).
Le calcul des nouvelles mesures d'une figure dans le cas d'une situation de proportionnalité (agrandissement ou réduction) de coefficient décimal non entier comme par exemple 1,5 ou $\frac{3}{2}$. C'est alors l'approche fonctionnelle qui est en jeu (voir l'exemple étudié dans la partie fractions : si la mesure initiale est 2,46 la nouvelle mesure est alors 2,46 × 1, 5 soit 3,69).

---

3. Ce calcul, comme toujours lorsqu'il s'agit d'un système d'unités de base 10, peut se ramener à un produit d'entiers : transformer la masse en grammes et le prix unité en centimes par gramme.

4. La grandeur quotient se note en mathématiques $\frac{<p>}{<m>}$ quotient d'un prix par une masse et la situation évoquée se caractérise donc par l'équation aux dimensions suivantes : un prix par une masse multiplié par une masse donne un prix (voir Brochure *Grandeurs et mesures* 1985, collection « Mots » de l'APMEP) $\frac{<p>}{<m>} \times <m> = <p>$.

5. Ici l'équation aux dimensions est la suivante $<l> \times <l> = <a>$ avec la cohérence dans les unités : des mètres par des mètres donnent des mètres carrés.

6. Transformer les longueurs en cm permet d'opérer sur des entiers : on obtient alors des cm^2 que l'on convertit en introduisant des écritures à virgule pour obtenir des m^2.

Retour au sommaire

Dans tous les cas, il s'agit de parvenir à la procédure usuelle : multiplier comme s'il s'agissait de nombres entiers (« ne pas tenir compte de la virgule ») et placer la virgule au bon endroit (la partie décimale du résultat doit avoir autant de chiffres[7] que la somme du nombre de chiffres des parties décimales des deux facteurs).

La division décimale, un algorithme et des situations de référence

Division à quotient décimal de deux nombres entiers.

Le sens courant est donné par le partage d'une grandeur entre n, par exemple, partage de 9 kg de… entre 8 personnes. L'expression du quotient est, elle, à formuler en fonction du contexte : par exemple, le résultat du partage des 9 kg sera précisé de manière différente s'il s'agit de 9 kg de poudre d'or ou de 9 kg de pommes (les réalités pratiques et les enjeux sont différents…).
La division décimale de deux entiers est le calcul du quotient de ces deux entiers, soit exact (notamment lorsque la division « tombe juste », c'est-à-dire lorsque ce quotient est un nombre décimal que l'on calcule complètement), soit approché (lorsqu'on arrête le calcul avant, ou lorsque le quotient n'est pas un nombre décimal : dans ce cas on peut toujours en obtenir une valeur approchée de la précision souhaitée).

La technique opératoire de la division (calculs posés en colonnes) se prolonge à nouveau facilement en s'aidant du tableau de numération avec les nombres décimaux.

Exemples : $\frac{22}{7} = 22 \div 7$ $\qquad$ $\frac{532}{56} = 532 \div 56$

Ils ont été choisis pour la compréhension de l'algorithme.

10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	
2	2					7
- 2	1					3,1428
	1	0				
-		7				
		3	0			
	-	2	8			
			2	0		
		-	1	4		
				6	0	
			-	5	6	
					4	

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	
5	3	2					56
- 5	0	4					9,5
	2	8	0				
-	2	8	0				
		0	0				

En fonction des nombres en présence, le sens et donc le contexte de l'opération amènent à la précision du quotient, à la poursuite ou non de l'algorithme. L'expression du résultat dépend, elle, toujours du contexte.
Par exemple, pour le calcul du quotient de 5 par 2 (5 ÷ 2), l'algorithme s'arrêtera alors que pour 50 par 7 (50 ÷ 7) il peut être davantage poursuivi (7,142857142857…).

7. Assertion valable avant d'avoir supprimé l'éventuel zéro terminal, inutile, du résultat comme dans l'exemple 2,5 × 3,4.

L'expression du résultat sera différente, pour ces deux calculs, s'il s'agit d'un partage d'une somme en euros entre 2 ou 7 personnes (2,50 € dans le premier cas et 7,14 € avec un reste non nul dans le second cas), d'un partage de bonbons ou de la confection de paquets.

Division d'un nombre décimal par un nombre entier.

Des problèmes de vitesse moyenne, de consommation moyenne, de prix selon la masse, ou le volume, de premières données géographiques de densité, par exemple, y donnent sens en CM2.
Ce nouvel algorithme de calcul ne pose pas de problème particulier lorsque celui concernant la division décimale de deux nombres entiers a été compris. La technique opératoire de la division (calculs posés en colonnes) se prolonge à nouveau en s'aidant de l'extension du tableau de numération.
Exemples choisis pour la compréhension de l'algorithme :

38,42 ÷ 9

	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	
	3	8	4	2			9
-	3	6					4,2688
		2	4				
	-	1	8				
			6	2			
		-	5	4			
				8	0		
			-	7	2		
					8	0	
				-	7	2	
						8	

210,6 ÷ 40

	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	
	2	1	0	6				40
-	2	0	0					5,265
		1	0	6				
	-		8	0				
			2	6	0			
		-	2	4	0			
				2	0	0		
			-	2	0	0		
				0	0	0		

Approximations successives et égalités caractéristiques	Approximations successives et égalités caractéristiques
Étape 1 : 4 < 38,42 ÷ 9 < 5 avec 38,42 = (4 x 9) + 2,42 Il ne faut pas oublier, dans le reste, les 2 unités et 42 centièmes. Le quotient est approché à l'unité près.	**Étape 1 :** 5 < 210,6 ÷ 40 < 6 avec 210,6 = (5 x 40) + 10,6 Il ne faut pas oublier, dans le reste, les 10 unités et 6 dixièmes. Le quotient est approché à l'unité près.
Étape 2 : Les 2 unités sont transformées en 20 dixièmes auxquels on ajoute (« en abaissant le 4 des 4 dixièmes ») les 4 dixièmes pour obtenir 24 dixièmes divisibles par 9 ; on place la virgule car on obtient des dixièmes au quotient approché. 4,2 < 38,42 ÷ 9 < 4,3 avec 38,42 = (9 x 4,2) + 0,62 Le quotient est approché au dixième près.	**Étape 2 :** Les 10 unités sont transformées en 100 dixièmes auxquels on ajoute (« en abaissant le 6 des 6 dixièmes ») les 6 dixièmes pour obtenir 106 dixièmes divisibles par 40 ; on place la virgule car on obtient des dixièmes au quotient approché. 5,2 < 210,6 ÷ 40 < 5,3 avec 210,6 = (40 x 5,2) + 2,6 Le quotient est approché au dixième près.

Retour au sommaire

Approximations successives et égalités caractéristiques	Approximations successives et égalités caractéristiques
Étape 3 : Les 6 dixièmes sont transformés en 60 centièmes auxquels on ajoute (« en abaissant le 2 des 2 centièmes ») les 2 centièmes pour obtenir 62 centièmes divisibles par 9 ; on obtient le chiffre des centièmes au quotient approché. $4,26 < 38,42 \div 9 < 4,27$ avec $38,42 = (4,26 \times 9) + 0,08$	**Étape 3 :** Les 26 dixièmes sont transformés en 260 centièmes divisibles par 40. $5,26 < 210,6 \div 40 < 5,27$ avec $210,6 = (40 \times 5,26) + 0,2$ Le quotient est approché au centième près.
Étape 4 : Les 8 centièmes sont transformés en 80 millièmes. $4,268 < 38,42 \div 9 < 4,269$ avec $38,42 = (4,268 \times 9) + 0,008$ On peut remarquer que l'on obtient le même reste partiel qu'à l'étape précédente.	**Étape 4 :** les 2 dixièmes ou 20 centièmes sont transformés en 200 centièmes divisibles par 40. $210,6 = 40 \times 5,265$ Le quotient au millième est un quotient exact.
Étape 5 : Les 8 millièmes sont transformés en 80 dix-millièmes. $4,2688 < 38,42 \div 9 < 4,2689$ avec $38,42 = (4,2688 \times 9) + 0,0008$ Le quotient est approché au dix-millième près, l'algorithme pourrait se poursuivre le chiffre suivant serait toujours 8. *Remarque : le développement décimal du quotient est maintenant périodique*[9] $\frac{38,42}{9} = \frac{3842}{900} = 4,26888.$	

Comme cela était le cas avec les nombres entiers, les divisions où interviennent des nombres décimaux pourront donner lieu progressivement à des classements, à l'identification de situations de référence où intervient cet algorithme.

Quelques repères pour une liaison école/collège

La connaissance des nombres entiers et une bonne représentation des nombres décimaux sont essentielles pour la construction des compétences du socle commun et pour l'ensemble de la scolarité.
Dans le domaine des nombres décimaux comme dans celui, plus général, des fractions, les apprentissages sur les nombres et les calculs sont en cours pour les élèves qui vont être scolarisés au collège et de nombreux éléments de continuité évoqués au cours des articles existent. Ceux-ci trouvent aussi place dans les apprentissages qui concernent la proportionnalité[9].
La compréhension de l'écriture décimale, les valeurs des écritures fractionnaires, celles des chiffres, d'une part ; l'usage des décimaux, l'identification de familles de situations de référence, d'autre part en représentent des aspects primordiaux et doivent constituer des points de vigilance.

8. Nous retrouvons, sur un exemple, le fait que tout rationnel ait un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.
9. Voir aussi le document *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège - Proportionnalité au collège*, juillet 2005.

Retour au sommaire

Partie 9

Utiliser les technologies de l'information et de la communication (Tice) dans l'enseignement en mathématiques

Fabien Emprin

En ce qui concerne les technologies, le concept d'instrument[1] est couramment utilisé par les didacticiens, car il permet de regarder « un outil » non pas comme une donnée mais comme quelque chose qui est construit individuellement par l'utilisateur. L'outil ouvre un nouvel univers de possibles mais a ses contraintes propres qui limitent ou empêchent certaines actions. Ce que nous pouvons d'abord tirer de cette approche est que les technologies ne sont pas efficaces intrinsèquement, mais parce que les enseignants construisent des usages qui exploitent le jeu de possibles et de contraintes spécifiques à ces dernières. Il faut donc, lorsque l'on utilise un outil, l'analyser comme une variable de la situation et donc se poser la question de la plus-value et des limites.

L'idée de « motiver les élèves » est souvent avancée quand il s'agit de promouvoir les Tice : « c'est attrayant », « ils sont attirés par les animations » mais est-ce bien ce type de motivation qui est recherchée à l'école ? Il s'agit en fait d'une motivation extrinsèque (qui vient de l'extérieur) qui au contraire de la motivation intrinsèque n'aide pas l'élève à savoir pourquoi il travaille et donc que ce qu'il fait sert à apprendre. Or, pour Bauthier et Rayou[2] c'est la motivation intrinsèque qui favorise la réussite. Il est également à noter que certains logiciels renforcent encore cette motivation extrinsèque par un système de récompenses : je réussis, j'ai un bonus ou un jeu en récompense…

Il n'est pas question ici de proposer une typologie des logiciels pédagogiques, mais il nous faut néanmoins clarifier ce dont nous parlons. Baron et Bruillard[3] déclinent trois grandes fonctions aux Tice : **médium** c'est-à-dire instrument d'acquisition de connaissances, **matière enseignée** donc l'informatique comme discipline et outil de production, par exemple le traitement de textes. L'instauration du B2i (brevet informatique et internet) positionne plutôt les Tice à l'école comme médium ou **outil de production**, donc au service des disciplines d'enseignement : « Les compétences constitutives du B2i sont donc développées et validées dans le cadre des activités pédagogiques disciplinaires, interdisciplinaires ou transversales menées dans les écoles et les établissements d'enseignement et de formation »[4].

Par ailleurs le terme Tice recouvre un grand nombre d'instruments différents que l'on peut regarder au moins à deux échelles :

---

1. Rabardel, *Les Hommes et les Technologies*, 1995 (voir bibliographie, p. 126).
2. Bautier & Rayou, *Les Inégalités d'apprentissage*, 2009 (voir bibliographie, p. 126).
3. Baron & Bruillard, *L'Informatique et ses usagers dans l'éducation*, 1996 (voir bibliographie, p. 126).
4. http://media.eduscol.education.fr/file/Certification_B2i/82/6/Referentiel_B2i_ecole_decembre_2011_202826.pdf

Retour au sommaire

– celles du matériel : la calculatrice, la salle informatique, deux ordinateurs en fond de salle, un TNI (tableau numérique interactif encore appelé TBI : tableau blanc interactif) ;
– celle du logiciel : les exercices (logiciels proposant des suites d'exercices), les tutoriels (visant à exposer une connaissance), les logiciels visant un apprentissage…
Nous regardons, à chacune de ces échelles, les potentialités et les limites des instruments.

Les différents matériels

La réflexion sur les instruments matériels est essentiellement pédagogique, car elle est relativement indépendante des contenus enseignés. Les différents cas ci-dessous ne sont pas exclusifs les uns des autres et des situations intermédiaires peuvent exister. Par ailleurs, le plan des écoles numériques rurales a montré tout l'intérêt des matériels, TNI et classe mobile, dans les classes à plusieurs cours. Il est désormais clair que l'installation du matériel dans la classe entraîne des utilisations bien plus fréquentes et intégrées à la pratique quotidienne. En outre, les nouveaux outils comme les tablettes tactiles se révèlent très pratiques ; immédiatement disponibles, elles permettent un grand nombre d'activités.

La salle informatique ou la classe mobile

La salle informatique est une configuration que l'on rencontre généralement dans des écoles importantes. L'utilisation a des contraintes fortes, notamment de planning. Les classes mobiles avec un nombre équivalent d'ordinateurs portables qui peuvent être transportés dans une salle de classe correspondent à un modèle pédagogique plus intégrateur.

Travail en classe entière

Dans le cas d'un travail en classe entière deux par poste, l'avantage est que tous les élèves peuvent travailler à la même tâche ce qui est pertinent dans le cas de situations d'apprentissages suivies par une mise en commun. Pour que le travail par binôme soit pertinent, il faut que les décisions se prennent à deux avant l'action sur l'ordinateur. Cela permet non seulement à tous les élèves de travailler, mais aussi de mettre l'action à distance et de privilégier la réflexion. Le risque de ce type de modalité de travail est qu'un seul élève travaille ou qu'il y ait de grandes différences de rythme de travail entre les groupes, car ce mode de fonctionnement est très sensible aux impondérables informatiques. Il suffit qu'un logiciel ne se lance pas pour que le groupe prenne beaucoup de retard. Lors du travail par classe entière les moments où l'enseignant a besoin de l'attention de tous les élèves comme dans les phases de consigne et de mise en commun doivent être gérés avec attention car la présence des écrans est très attractive pour les élèves. Pour éviter cela, il est préférable par exemple de mener ces deux phases ordinateurs (ou écrans) éteints ou encore dans une autre salle. L'utilisation d'un vidéoprojecteur (ou d'un TNI) peut alors permettre un travail riche. Le fait de mener ces deux phases importantes sans que les élèves soient devant les ordinateurs renforce la mise à distance de l'action par rapport à la réflexion : durant la consigne, on réfléchit et on anticipe sur ce que l'on va faire ; lors de la mise en commun on se remémore ce que l'on a fait et l'impact de ses actions sur l'activité. L'équipe Éclire a formalisé cette mise à distance

Retour au sommaire

de l'action dans l'utilisation du logiciel qu'elle a produit : *Langagiciel*[5] (en français et en mathématiques, les dispositifs pédagogiques amènent « l'élève à mesurer la différence entre ce qu'il veut dire et ce qu'il dit qu'il veut dire »).

Travail en demi-classe

Le travail par demi-classe avec un élève par poste nécessite que, soit la demi-classe sur table, soit la demi-classe sur ordinateur soit autonome. Dans le premier cas, les enjeux sont les mêmes que précédemment, dans le second les logiciels utilisés doivent permettre à l'élève de travailler sans intervention de l'adulte. Pour obtenir cette autonomie, l'ordinateur peut jouer le rôle d'un tuteur plus ou moins intelligent qui guide l'élève dans sa progression entre les tâches ou qui lui renvoie des informations personnalisées pour avancer dans la tâche. Il est important qu'un dispositif de mémorisation des réponses ou des résultats de l'élève existe pour permettre à l'enseignant de connaître, comprendre et prendre en compte le travail de l'élève. Si ces deux fonctions (guidage et mémorisation) ne sont pas assurées par le logiciel lui-même, c'est à l'enseignant de mettre en place un contrat écrit par exemple qui permette à l'élève de savoir ce qu'il doit faire et de noter ses résultats. Par exemple avec le logiciel d'entraînement aux tables *Tabmult*[6] l'élève doit retrouver dans un tableau de Pythagore la place d'un nombre donné (par exemple 16 = 4 × 4 ou 2 × 8). L'élève peut choisir l'opération (+ -/×) sur laquelle il est interrogé, les dimensions du tableau de Pythagore, le délai qui lui est accordé pour répondre et si le logiciel remplit automatiquement les cases symétriques (le fait de cliquer 16 = 2 × 8 remplit automatiquement 8 × 2). Le logiciel donne un score de réussite à l'élève, mais ne permet pas de le mémoriser et ne s'adapte pas en fonction de ce score c'est donc à l'enseignant de construire avec ses élèves des contrats personnalisés indiquant les différents paramètres que l'élève doit choisir, lui permettant de noter ses scores et fixant à partir de quel score l'élève doit changer les paramètres (diminuer le temps de réponse, augmenter la taille du tableau de Pythagore).

Quelques ordinateurs en fond de classe

La présence de quelques ordinateurs en fond de salle est un modèle qui tend désormais à être dépassé par l'accès à des matériels mobiles. Cette configuration des matériels vise leur utilisation comme des ressources ponctuelles (les élèves vont chercher des informations, une réponse…) ou des outils de différenciation. Dans le premier cas, l'ordinateur est une bibliothèque multimédia, dans le second c'est un outil d'aide au diagnostic et au travail autonome de l'élève, mais un outil seulement. Les logiciels mis en œuvre doivent alors être du même type que ceux cités au paragraphe précédent, utilisés comme outil de différenciation. Là encore l'enseignant doit récupérer des informations sur ce que l'élève fait pour construire un parcours adapté (individuel ou commun à certains élèves qui auraient les mêmes besoins).
Que cette différenciation soit dédiée aux élèves qui ont des difficultés ou à des élèves qui au contraire vont approfondir des concepts, il est important que tous les élèves puissent utiliser les ordinateurs. Dans le cas contraire, ils deviendraient la récompense pour ceux qui ont terminé ou la punition de ceux qui ne comprennent pas.

5. http://www.langagiciels.com/
6. http://1214.free.fr/rubriques/logiciels/tabmult.htm logiciel gratuit de Philippe Gerland.

Retour au sommaire

Le TNI et le vidéoprojecteur

La différence entre le tableau numérique interactif et le vidéoprojecteur[7] réside dans le fait que l'élève et l'enseignant agissent directement sur le tableau avec un crayon au lieu de le faire par l'intermédiaire d'une souris. Le premier risque de ce type de matériel est de renforcer l'aspect magistral de l'enseignement de par ses possibilités multimédias et l'utilisation de tutoriels. Sur le site de Thérèse Éveilleau[8] se trouvent de nombreuses animations qui peuvent illustrer des concepts du programme. Par exemple une animation qui reproduit la machine de Pascal (ou pascaline[9]). Par un système d'engrenage, cette machine permet de faire les quatre opérations. Plusieurs pistes d'utilisation sont possibles pour aller au-delà de la simple illustration, par exemple en l'utilisant comme support pour demander aux élèves de CM1 de trouver comment faire une multiplication avec une pascaline, après une phase de recherche les élèves viennent tester leurs techniques d'utilisation. La technique nécessite de revenir sur la décomposition des nombres en base dix, ce travail permet de revenir sur le sens de la technique opératoire posée en faisant le parallèle entre manipulation de la pascaline et technique écrite. Il existe aujourd'hui de très nombreuses ressources numériques et le plan des écoles numériques rurales, en attribuant un crédit de 1 000 euros à chaque école retenue, a permis une diffusion. Il faut aussi noter la dynamique en cours autour du logiciel libre *Sankoré*.
La dimension frontale de ce matériel est inévitable c'est pourquoi il est important que ce soit les élèves qui le manipulent de façon privilégiée. Il peut d'ailleurs être utilisé comme un atelier au même titre qu'un ordinateur en fond de classe. Ces avantages sont notamment les interactions assez naturelles TNI/élèves grâce au stylo et les fonctions de mémorisation des actions des élèves. Parmi ces inconvénients nous pouvons noter le fait qu'il soit à la vue de tous en place centrale dans la classe et qu'il attire l'attention des autres groupes.
Le TNI peut également faciliter les mises en commun, car il permet de mémoriser ce que l'élève écrit et de le rappeler à tout moment. Des dispositifs tels que *Italc*[10], *Tkontrol*[11] ou *VNC*[12], pour rester sur des logiciels libres ou ayant des versions gratuites, permettent de vidéo-projeter les écrans des élèves et de prendre le contrôle des postes à distance, facilitant ainsi la mise en commun de situations pédagogiques utilisant une salle Tice ou une salle mobile.

La calculatrice

Elle a un statut particulier notamment parce qu'elle peut être disponible pour chaque élève, qu'elle ne contient en quelque sorte qu'un seul logiciel et qu'elle est utilisée en dehors de l'école. Sa fonction sociale qui est de permettre de réaliser des calculs qui seraient trop fastidieux ou insuffisamment fiables à la main est transposable à l'école. En effet pour les programmes de 2008, « la calculatrice fait l'objet d'une utilisation raisonnée en fonction de la complexité des calculs auxquels sont confrontés les élèves ». Introduire la calculatrice très tôt pour effectuer des opérations pour lesquelles l'élève n'a pas encore de technique opératoire fiable permet d'initier cette utilisation raisonnée. Cette introduction intervient après l'introduction de l'opération, par exemple quand les élèves savent dire « qu'il y a huit fois

7. Il existe maintenant de nouveaux vidéoprojecteurs qui sont interactifs.
8. http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/
9. http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/pascaline.htm
10. http://italc.sourceforge.net/
11. http://tkontrole.vverdon.fr/
12. http://www.realvnc.com/products/download.html

quinze carrés » et que cela correspond à faire 15 + 15 + 15 (huit fois), mais qu'ils ne savent pas encore effectuer la multiplication. Ce travail sur les calculatrices peut aussi être complémentaire d'un travail sur les ordres de grandeur. Des situations montrant les limites de certaines calculatrices basiques (par exemple en faisant [1][÷][3][=][×][3][=] et en obtenant 0.999999999 au lieu de 1) permettent, même si ces erreurs sont très marginales, de démystifier cet instrument.
Il est à noter que l'utilisation de la calculatrice interfère également avec le formalisme mathématique, car elle utilise un signe [=] dynamique qu'il serait plus juste d'appeler [effectuer] : en effet la séquence de calcul [3] [+] [2] [=] [5] [+] [2] [=] [7] est fausse mathématiquement, car $3 + 2 \neq 5 + 2$.
La calculatrice doit aussi être au cœur de situations d'apprentissage, car elle permet de découvrir des phénomènes numériques ou encore être un support de problèmes comme dans le logiciel la calculatrice capricieuse[13].

Les instruments logiciels

Les logiciels pour produire

Les logiciels dédiés à la fonction de production ne sont pas, du moins au niveau de l'école, spécifiques à l'enseignement des mathématiques. De façon générale leur plus-value vient de la qualité de la production qu'ils permettent au niveau typographique ou encore par des aspects multimédias (vidéo, sons…).
Au-delà des outils de traitement de texte ou des outils multimédias utilisés, il est possible d'amener les élèves à produire des exercices interactifs. Dans le cadre d'un atelier de remédiation sur la résolution de problèmes, les élèves peuvent être amenés à produire des énoncés et des questions qui correspondent à ces énoncés. Pour valoriser ce travail, les élèves peuvent produire, avec un logiciel tel que *Hotpotatoes*[14] ou *clic 3.0*[15], un exercice interactif que les autres élèves feront lors d'une séance ultérieure. Ces logiciels permettent également de concevoir des QCM, mots croisés, puzzle interactif, et donc de finaliser de nombreuses activités.
D'autres logiciels (messageries, plateforme de travail…) permettent aux élèves d'échanger ou de faire un travail collaboratif avec des classes éloignées, de participer à des concours.
Enfin, les possibilités de connexion à internet permettent aux élèves de trouver des informations permettant de développer leur culture scientifique, de faire des recherches, tout en travaillant leur esprit critique par rapport à l'information.

Les logiciels pour les apprentissages

Nous avons déjà explicité la place des tutoriels, notamment avec l'utilisation du TNI ou du vidéoprojecteur et des logiciels qui peuvent, sous le contrôle du professeur, être utilisés pour individualiser certains entraînements. Nous nous centrerons donc ici sur les logiciels qui permettent de mettre en place des situations d'apprentissage visant des connaissances ou des concepts nouveaux.
Certains logiciels reprennent des situations d'apprentissage conçues pour être faites en classe, les plus-values qu'ils peuvent apporter sont d'abord de dispenser

13. http://www.abuledu.org/leterrier/leterrier-calc-cap, logiciel libre du projet Abuledu.
14. *Hotpotatoes* logiciel gratuit pour une utilisation pédagogique (voir les conditions sur le site) http://hotpot.uvic.ca/
15. *Clic 3.0* est un logiciel gratuit développé par région Catalogne dans le cadre du programme européen *Sun2*. http://clicapplic.net/

Retour au sommaire

l'enseignant d'une préparation matérielle fastidieuse (par exemple les situations qui utilisent la monnaie ou un système d'échanges), mais aussi de pouvoir garder trace de l'activité de l'élève, ce qui est difficile en condition de classe normale. La limite de ces situations est liée au fait qu'elles simulent en fait des situations réelles et donc qu'il faut s'assurer que les élèves ont bien compris ce qu'ils font.
Enfin, certains logiciels permettent de faire des choses qu'il n'est pas possible ou difficile de faire sans. Les logiciels de géométrie dynamique par exemple obligent les élèves à utiliser des primitives de construction comme « parallèle à, passant par » sans quoi la figure construite ne résistera pas aux déplacements[16]. Dans le domaine du numérique le tableur permet de construire des boîtes noires, c'est-à-dire que le logiciel opère sur un nombre (une cellule) et donne un résultat sans que l'élève ne puisse voir la formule, il peut essayer plusieurs nombres et doit trouver quelles sont les opérations mathématiques cachées.

Conclusion

L'évolution des Tice autorise aujourd'hui des utilisations très diversifiées : elles permettent d'améliorer la qualité de l'enseignement frontal par davantage de mobilisation de l'attention, elles sont un moyen de différenciation pédagogique, de développement de l'autonomie, elles construisent la culture du numérique dont aura besoin l'élève en lien avec la citoyenneté…
Les Tice sont un secteur très dynamique tant au niveau de la production de matériel, de logiciels que des ressources pédagogiques. Si certains enseignants se sentent inquiets face à ces nouveaux outils nous avons cherché à montrer ici que c'est grâce à leurs compétences didactiques et pédagogiques qu'ils pourront les utiliser de façon pertinente.
L'utilisation des technologies prend son sens lorsqu'elle permet de résoudre un problème pédagogique, d'apporter une plus-value. Avant de mettre en œuvre une séance utilisant les technologies il est donc important de se poser la question de cette plus-value en fonction du but recherché : individualisation/entraînement. Une fois ce choix effectué en fonction des conditions matérielles, il est important de mettre en place des phases permettant d'anticiper sur ce que l'on va faire puis de revenir sur ce que l'on a fait pour faire émerger ce que l'on a appris loin des écrans. Sur ces bases pourront se construire des usages riches exploitant pleinement les potentialités existantes et à venir des technologies numériques.

Bibliographie

- **BARON G.-L. & BRUILLARD E.,** *L'Informatique et ses usagers dans l'éducation*, Paris, PUF, 1996.
- **BAUTIER É. & RAYOU P.,** *Les Inégalités d'apprentissage. Programmes, pratiques et malentendus scolaires*, Paris, PUF, 2009.
- **RABARDEL P.,** *Les Hommes et les Technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*, Paris, Armand Colin, 1995.

16. Voir un exemple commenté et illustré sur le site : http://revue.sesamath.net/spip.php?article130.

Retour au sommaire

Partie 10

Des outils et supports aux gestes professionnels

Valérie Bistos et Nicole Matulik

Ce chapitre s'attache à préciser la place des outils et des supports sur lesquels prennent appui les gestes professionnels des maîtres pour enseigner les mathématiques. Ils sont essentiels pour l'enseignant en ce sens qu'ils guident sa pratique pédagogique, mais aussi pour l'élève car, bien souvent, ils constituent une référence. Les éléments de continuité inter-classes et inter-cycles déjà présents dans les différentes parties du document, *Le nombre au cycle 2*, seront repris et prolongés au cycle 3.

Organiser la progressivité des apprentissages

L'organisation, par les équipes pédagogiques, de la progressivité des apprentissages en mathématiques au cycle des approfondissements, doit prendre appui sur les repères donnés par les programmes et explicités par niveaux de classe en termes d'objectifs d'apprentissage. Les programmations de cycle et/ou d'école qui en découlent, donnent lieu à une répartition des contenus de façon à garantir que toutes les notions mathématiques sont enseignées, mais aussi à s'assurer que les réinvestissements, les approfondissements et les redites nécessaires à l'ancrage dans la durée sont organisés.
Les programmations sont des outils essentiels de continuité qui favorisent la cohérence des apprentissages, que l'on ait fait le choix d'une démarche pédagogique linéaire ou d'une démarche pédagogique spiralaire qui évite par exemple l'écueil de différer en fin d'année l'enseignement des nombres décimaux à la seule raison que l'apprentissage des nombres entiers n'est pas encore abouti. Le tout en vue de conduire au mieux les élèves vers la maîtrise des connaissances et compétences du pilier 3 du palier 2 du socle commun attendues à l'issue de l'école primaire, et d'assurer ainsi des conditions favorables à l'entrée au collège.
La table des matières ou le sommaire du manuel de mathématiques, qui constitue une référence pour l'élève et sa famille, ne saurait se substituer à la progression annuelle de classe. Cette dernière, à adapter chaque année au regard de l'hétérogénéité de toute classe, doit rendre compte des choix opérés par le maître dans le cadre de la programmation établie conformément aux instructions officielles. Elle sera donc d'autant plus fonctionnelle qu'elle fera l'objet d'une véritable appropriation par l'enseignant. Pour exemple, l'apprentissage des nombres entiers naturels, des nombres décimaux ou des fractions, nécessite de structurer une programmation qui ménage des étapes bénéfiques pour les apprentissages, et notamment ceux des élèves en difficulté, par la conception d'un ensemble de situations de référence incontournables, ceci quel que soit le niveau d'enseignement considéré.

Retour au sommaire

La table des matières ou le sommaire du manuel de mathématiques peut ne pas respecter complètement la progression choisie par le maître. Cette dernière doit alors être communiquée et explicitée aux élèves pour les aider à suivre tout au long de l'année l'avancée de leurs apprentissages.
Le choix des manuels, voire des fichiers de mathématiques, relève d'une décision concertée de l'équipe pédagogique. Il n'est pas indispensable de conserver la même collection d'une année sur l'autre, mais sur certains points comme les techniques opératoires ou l'approche des nombres décimaux, mieux vaut garantir une certaine unité.

Concevoir l'emploi du temps pour planifier les enseignements

L'emploi du temps de la classe doit, conformément aux instructions officielles, intégrer rigoureusement les cinq heures hebdomadaires indiquées pour les mathématiques, mais aussi garantir leur enseignement quotidien. Les quatre domaines : nombres et calcul, géométrie, grandeurs et mesures, organisation et gestion de données, peuvent utilement y figurer pour préciser l'organisation de l'enseignement des connaissances, même si bien entendu les inter-relations entre ces domaines sont tels que la plupart du temps les problèmes proposés porteront sur plusieurs domaines à la fois et viseront le développement de compétences utiles dans l'ensemble des domaines. Ce choix permet aussi de s'assurer du temps accordé à chaque domaine, qui doit permettre le traitement de l'ensemble du programme de façon équilibrée.
Notons que si un enseignement quotidien des mathématiques est nécessaire, il peut être intéressant d'organiser cet enseignement en blocs horaires de tailles différentes, répartis inégalement sur la journée : par exemple, un temps court dédié au calcul mental peut être programmé chaque jour, indépendamment d'une autre plage horaire dédiée aux mathématiques (et mobilisable certaines fois aussi pour le calcul mental, comme indiqué dans l'article « Calcul et conceptualisation »).

Élaborer les écrits et garder trace des apprentissages

En mathématiques, comme dans les autres domaines, les élèves sont amenés à élaborer quotidiennement des écrits. Trois types d'écrits sont à distinguer : l'écrit de recherche, l'écrit destiné à être communiqué, l'écrit de référence.
L'usage, préconisé dès le cycle 2, d'un **cahier de mathématiques** au sein duquel la résolution de problèmes trouve en particulier toute sa place, répond à cette exigence de production et de conservation de traces écrites.
Le **cahier de brouillon**/essai, support de recherche, tâtonnement et essai-erreur, en permanence à la portée de l'élève, a vocation à lui permettre d'oser agir pour la première fois sans être sûr du résultat. Le maître y perçoit les procédures engagées, comprend les cheminements, relève les erreurs d'une activité de recherche fondée sur des traces. Il gagne à en faire le cas échéant le support d'un premier dialogue didactique : l'élève est invité à expliquer son cheminement au travers de la chronologie de ses traces. Ce seul passage à l'explicite, qu'il peut conduire aussi avec un pair, peut quelquefois suffire à engager les ajustements nécessaires, en résolution de problèmes en particulier.

Retour au sommaire

Si l'**ardoise** n'a pas vocation à garder trace des essais et des erreurs de l'élève, elle permet toutefois d'élaborer les écrits en tant que support pratique de réponses courtes et rapides, propice en particulier au calcul mental, facilitant pour le maître la prise d'information directe et collective. Elle n'exclut pas d'intégrer à un ou des moments donnés l'explicitation et la comparaison des différentes procédures mobilisées par les élèves, y compris les procédures erronées quand elles révèlent une difficulté significative, compte tenu du développement attendu de l'acquisition de stratégies de calcul mental efficaces. À ce titre, l'enseignant s'attache à expliciter les procédures utilisées et les propriétés des nombres en jeu, pouvant, si besoin, introduire ou rappeler certaines procédures jugées efficaces qui n'auraient pas été énoncées par les élèves, pour déboucher sur une hiérarchisation des connaissances nécessaire à la construction des savoirs, dans le but de stabiliser et d'enrichir l'ensemble des connaissances et méthodes de calcul des élèves.
Le **cahier-mémoire**, support de référence au sein duquel ce qui vient d'être appris est formalisé, a vocation à recenser des résultats, des démarches et des techniques étayés d'exemples issus de situations concrètes. La conception d'un sommaire pour chacun des quatre champs permet une catégorisation qui facilite l'utilisation de ce cahier et contribue aux apprentissages. Un manuel bien choisi peut également faire office d'outil de référence, en complément d'un cahier du jour sur lequel figurent des exercices et des résultats, à la condition qu'il fasse l'objet d'un enseignement méthodologique de son utilisation comme déjà précisé plus haut.
L'élaboration et l'utilisation de ces différents supports doivent faire l'objet, pour traverser les trois années du cycle, d'une réflexion au sein des équipes pédagogiques guidée par le souci de continuité et de cohérence qui engage les enseignants des trois niveaux de classe. Cela permet ainsi de partir des références déjà élaborées pour réactiver les savoirs, approfondir les connaissances, en aborder de nouvelles, puis faire évoluer les traces écrites.
L'**affichage** qui est une traduction des écrits collectifs, mérite en mathématiques une attention particulière. Cet outil de référence qui présente de façon synthétique le savoir, constitue une source d'information support de mémoire.
Deux sortes d'affichages sont à distinguer : ceux pérennes qui sont progressivement amendés tout au long de la scolarité primaire pour servir de repères cohérents de continuité (exemple de la bande numérique qui évolue en droite numérique permettant de travailler les nombres décimaux et les fractions), et ceux provisoires qui ne durent que le temps de l'élaboration du savoir pour être retirés dès lors qu'une notion est acquise, sans pour autant être détruits mais plutôt stockés ailleurs et accessibles si besoin est (exemple du répertoire multiplicatif devant donner lieu à mémorisation, ou encore des techniques opératoires visant l'acquisition de procédures peu à peu automatisées).

Utiliser la calculatrice de façon raisonnée

Comme réaffirmé par les programmes à l'école primaire, la calculatrice doit faire l'objet d'une utilisation raisonnée. Elle est donc un outil présent dans la classe au même titre que la règle graduée, en ce sens que chaque élève en a une à sa disposition, ce qui n'exclut pas que le maître puisse ponctuellement en interdire l'utilisation. Aucun modèle particulier n'est préconisé, ce choix revenant à l'enseignant ou à l'équipe pédagogique. Disposer de plusieurs modèles permet d'étudier les variantes et les conséquences sur les calculs et les résultats, et rendre prudent par rapport à cet outil. Sous la direction de l'enseignant, la calculatrice peut être

Retour au sommaire

tour à tour outil de calcul, support d'exercice ou de problème ou moyen d'investigation sur les nombres.
L'utilisation de la calculatrice nécessite un enseignement et un apprentissage, afin d'éviter que des difficultés techniques viennent parasiter le travail mathématique. Pour cela, l'enseignant met en œuvre différentes situations qui permettent aux élèves d'identifier les ressources de l'outil en vue de sa parfaite maîtrise. Plusieurs fonctionnalités peuvent être étudiées dont, en particulier au cycle 3, les touches opérateurs constants, les priorités opératoires et les touches mémoires. Il est important que les élèves prennent conscience que la calculatrice n'est pas magique, qu'elle ne résout rien toute seule et ne fait qu'exécuter les calculs qui ont été entrés. Elle n'est pas non plus toujours l'outil le plus rapide ni le plus performant car elle demande de planifier les calculs à effectuer, de noter les calculs intermédiaires, de contrôler la validité du ou des résultats par un calcul approché, de se méfier des erreurs de frappe.

Développer une culture numérique en mathématiques[1]

Les ressources numériques en mathématiques sont nombreuses. Les logiciels éducatifs et les sites interactifs permettent, entre autre, d'entraîner les élèves en vue de renforcer leurs acquisitions, en les faisant travailler tantôt individuellement, tantôt en groupe, essentiellement en autonomie. Ils permettent également de mettre en place un suivi plus individualisé sur le plan des contenus d'apprentissage comme sur celui du rythme de travail, y compris pour les élèves à besoins spécifiques, sans pour autant que leur activité à partir d'un programme d'entraînement informatisé ne se limite au temps d'aide personnalisée. L'enseignant profitera par exemple d'inscrire ses élèves à un tournoi de calcul mental en ligne pour ancrer dans les habitudes de la classe une utilisation quotidienne et responsable de ces outils interactifs.
Le tableau numérique interactif est, au-delà d'un support de communication, un outil pédagogique au service de la pratique de classe et en particulier de l'enseignement des mathématiques. Il permet à l'enseignant une présentation collective dynamique et un accès facile aux traces collectives comme individuelles, favorisant une gestion efficace de l'erreur, permettant la mise en mémoire des procédures dans leur intégralité et équivalant à un cahier de recherche dématérialisé. Il accroît chez l'élève la motivation, la participation et la concentration de par son caractère interactif stimulant à la fois ses capacités visuelles et auditives pour une meilleure entrée dans les apprentissages. S'il assure un gain de temps de par la gestion matérielle instantanée qu'il offre à l'élève comme à l'enseignant, ce dernier veillera néanmoins à préserver des phases de transition nécessaires à l'apprenant pour se remobiliser. Le maître doit également être attentif à ce que l'outil d'enseignement ne prenne pas le pas sur l'objet d'enseignement.
Ces outils nécessitent, tout comme la calculatrice, un apprentissage. C'est par des allers-retours fréquents entre l'outil pédagogique et le support informatique que l'élève parviendra à en acquérir la maîtrise pour développer les compétences mathématiques. Ils permettent au maître de diversifier ses modalités de travail, offrant de multiples possibilités par de nouvelles entrées motivantes. Le numérique fait partie intégrante de l'univers des enfants, l'école du XXIe siècle ne peut plus à ce jour en faire l'économie et l'enseignant doit progressivement intégrer dans sa pratique quotidienne l'outil informatique.

1. Voir aussi l'article de Fabien Emprin.

Retour au sommaire

Personnaliser les parcours et individualiser les aides

La personnalisation des parcours et l'individualisation des aides sont des axes forts de l'école du socle. Les équipes pédagogiques, dans le cadre des concertations, s'assurent que chaque élève, quel que soit son niveau initial, progresse. Pour cela, elles se réfèrent aux différents documents ressources institutionnels qui définissent le niveau attendu à chaque palier du socle commun. C'est ainsi qu'elles identifient les élèves qui risquent de ne pas maîtriser les connaissances et les compétences indispensables à la fin d'un cycle. La difficulté scolaire doit être appréhendée comme un décalage d'acquisition par rapport à l'un des paliers du socle commun, et non pensée comme manifestation d'un décalage par rapport au niveau de production du reste des élèves.

Il appartient au maître, en premier lieu dans le cadre de la classe, de mettre en œuvre une approche différenciée des apprentissages. Partant d'une évaluation individuelle ou collective des compétences des élèves afin de repérer le cas échéant ceux qui demandent une attention particulière, la pratique de différenciation pédagogique vise pour ces derniers le renforcement des apprentissages et la consolidation des acquis. Dans le domaine disciplinaire des mathématiques, concernant le champ des nombres et calcul, au cycle 3 comme déjà au cycle 2, l'enseignant veillera à centrer l'aide sur la compréhension et la maîtrise du système décimal, la connaissance aisée des faits numériques (tables, doubles et moitiés…), ainsi que sur les stratégies de résolution de problèmes. Pour que l'aide soit efficace et que le travail prenne sens pour les élèves, il convient de mener l'enseignement aussi souvent que possible en lien avec des situations concrètes qui permettent, par une appropriation directe, d'entrer plus rapidement dans l'activité mathématique elle-même.

C'est par l'alternance des modalités pédagogiques (individuel/collectif/groupal ; écrit/oral/manipulation…), la diversité des outils et supports (matériels de numération, logiciels, jeux…), la variation des temps d'exécution (rythmes d'apprentissage, phases d'apprentissage…), que l'enseignant se donne les moyens de répondre aux besoins de chacun des élèves. L'aide personnalisée, le stage de remise à niveau, l'accompagnement éducatif sont autant de dispositifs qui permettent d'y prétendre, dans une nécessaire articulation complémentaire que le programme personnalisé de réussite éducative formalisera le cas échéant en tant qu'outil contractuel.

Quel que soit le dispositif d'aide, le premier support de travail de l'élève est le dialogue avec le maître, moyen de l'étayage et de l'explicitation des stratégies. Ce dernier n'hésitera pas, si nécessaire, à reformuler la parole de l'élève dans un langage mathématique dont l'appropriation est un facteur de réussite. Ce dialogue est possible dans une posture duelle entre le maître et l'élève, mais aussi dans un groupe restreint qui favorise les interactions sociales et cognitives entre pairs. Travailler en groupe restreint suppose aussi d'utiliser d'autres supports : le matériel pédagogique permet aux élèves qui en ont besoin de passer par la manipulation pour comprendre une notion, les ressources numériques y ont toute leur place comme détaillé plus haut, le jeu est à encourager dans la mesure où l'objectif n'est pas de jouer pour s'amuser mais d'apprendre en jouant. Car, en jouant, l'élève trouve du plaisir à calculer, raisonner, développer des stratégies, et ainsi il apprend.

Retour au sommaire